



ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**В. Н. Бирюков, В. А. Ляшев, М. Н. Максимов,  
Н. И. Мережин, В. П. Попов, В. И. Семенцов**

# **Сборник задач по основам теории цепей**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ БАКАЛАВРОВ

4–е издание, переработанное и дополненное

Под редакцией доктора технических наук,  
профессора **В. П. Попова**

Москва • Юрайт • 2013

УДК 621  
ББК 32.841я73  
Б64

**Авторы:**

**Бирюков Вадим Николаевич** — кандидат технических наук, доцент кафедры теоретических основ радиотехники ТТИ ЮФУ (Таганрогский технологический институт Южного федерального университета);

**Ляшев Владимир Александрович** — кандидат технических наук, доцент, старший инженер ООО «Техкомпания Хуавэй», департамент исследований и разработок;

**Максимов Михаил Николаевич** — кандидат технических наук, доцент кафедры теоретических основ радиотехники ТТИ ЮФУ;

**Мережин Николай Иванович** — кандидат технических наук, доцент кафедры теоретических основ радиотехники ТТИ ЮФУ;

**Попов Вадим Петрович** — доктор технических наук, профессор, последнее место работы: советник руководителя ТТИ ЮФУ по правам студентов и сотрудников;

**Семенцов Владимир Иванович** — кандидат технических наук, профессор, последнее место работы: профессор кафедры теоретических основ радиотехники ТТИ ЮФУ.

**Бирюков, В. Н.**

Б64 Сборник задач по основам теории цепей : учеб. пособие для бакалавров / В. Н. Бирюков, В. А. Ляшев, М. Н. Максимов, Н. И. Мережин, В. П. Попов, В. И. Семенцов ; под ред. В. П. Попова. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2013. — 285 с. — Серия : Бакалавр. Базовый курс.

ISBN 978-5-9916-2000-0

Данное издание представляет собою электронное приложение к учебнику В. П. Попова «Основы теории цепей» и предназначено для оказания методической помощи студентам радиотехнических специальностей вузов в их самостоятельной работе по освоению курса основ теории цепей (ОТЦ). Сборник задач состоит из десяти глав, включающих задачи по всем основным разделам теории цепей. До половины задач в каждой главе курса содержат решения или методические указания.

*«Сборник задач по основам теории цепей» может использоваться при обучении студентов родственных специальностей, в частности студентов направления «Телекоммуникации», а также может быть полезен инженерам и научным сотрудникам, работающим в смежных областях знания и самостоятельно изучающим методы анализа и основы синтеза электрических цепей.*

УДК 621  
ББК 32.841я73

- © Бирюков В. Н., Ляшев В. А.,  
Максимов М. Н., Мережин Н. И.,  
Попов В. П., Семенцов В. И., 2009  
© Бирюков В. Н., Ляшев В. А.,  
Максимов М. Н., Мережин Н. И.,  
Попов В. П., Семенцов В. И., 2012,  
с изменениями  
© ООО «Издательство Юрайт», 2013

ISBN 978-5-9916-2000-0

## Оглавление

<b>Предисловие</b> .....	<b>5</b>
<b>Глава 1. Основные понятия теории цепей</b> .....	<b>6</b>
1.1. Идеализированные пассивные элементы .....	6
1.2. Идеализированные активные элементы .....	10
1.3. Компонентные и топологические уравнения электрических цепей .....	13
<b>Глава 2. Линейные электрические цепи при гармоническом воздействии</b> .....	<b>18</b>
2.1. Гармонические функции. Метод комплексных амплитуд ..	18
2.2. Идеализированные пассивные элементы при гармоническом воздействии .....	20
2.3. Анализ простейших линейных цепей при гармоническом воздействии .....	22
2.4. Энергетические процессы в простейших цепях при гармоническом воздействии .....	28
2.5. Преобразования электрических цепей .....	30
2.6. Цепи с взаимной индуктивностью .....	34
<b>Глава 3. Частотные характеристики и резонансные явления</b> .....	<b>39</b>
3.1. Комплексные частотные характеристики линейных электрических цепей .....	39
3.2. Последовательный колебательный контур .....	44
3.3. Параллельный колебательный контур .....	49
3.4. Связанные колебательные контуры .....	53
<b>Глава 4. Анализ линейных электрических цепей с постоянными параметрами при гармоническом воздействии</b> .....	<b>57</b>
4.1. Методы формирования уравнений электрического равновесия цепи .....	57
4.2. Основные теоремы теории цепей и их применение для анализа .....	70
4.3. Метод сигнальных графов .....	76
<b>Глава 5. Нелинейные резистивные цепи</b> .....	<b>83</b>
5.1. Графические методы анализа нелинейных резистивных цепей .....	83
5.2. Аппроксимация характеристик нелинейных резистивных элементов .....	88

---

5.3. Нелинейные резистивные элементы при гармоническом внешнем воздействии .....	91
<b>Глава 6. Методы анализа переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами .....</b>	<b>96</b>
6.1. Классический метод анализа переходных процессов .....	96
6.2. Операторный метод анализа переходных процессов .....	113
6.3. Единичные функции и их свойства .....	132
6.4. Временные характеристики простейших цепей .....	136
6.5. Применение интеграла Дюамеля .....	141
<b>Глава 7. Основы теории четырехполюсников и многополюсников .....</b>	<b>149</b>
7.1. Многополюсники и цепи с многополюсными элементами ...	149
7.2. Основные уравнения и системы первичных параметров проходных четырехполюсников .....	155
7.3. Характеристические параметры и комплексные частотные характеристики неавтономных проходных четырехполюсников .....	169
7.4. Невзаимные проходные четырехполюсники .....	180
7.5. Электрические фильтры .....	185
<b>Глава 8. Цепи с распределенными параметрами .....</b>	<b>196</b>
8.1. Однородная длинная линия при гармоническом внешнем воздействии .....	196
8.2. Частотные характеристики однородных длинных линий ...	200
8.3. Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами .....	208
8.4. Цепи с распределенными параметрами специальных типов ...	212
<b>Глава 9. Синтез электрических цепей .....</b>	<b>221</b>
9.1. Свойства и критерии физической реализуемости операторных входных функций пассивных линейных электрических цепей .....	221
9.2. Методы реализации реактивных двухполюсников .....	227
9.3. Основы синтеза линейных пассивных четырехполюсников ...	235
<b>Глава 10. Методы автоматизированного анализа цепей .....</b>	<b>242</b>
10.1. Компонентные и топологические матрицы электрической цепи .....	242
10.2. Методы узловых напряжений и контурных токов .....	248
10.3. Метод переменных состояния .....	251
<b>Ответы .....</b>	<b>258</b>

## Предисловие

«Сборник задач по основам теории цепей» предназначен для совместного использования с учебником В. П. Попова «Основы теории цепей». Книги полностью согласованы между собой по структуре, терминологии, методике изложения и обозначениям. Название разделов сборника задач совпадают с названиями глав учебника и с названиями соответствующих разделов типовой программы курса; названия параграфов задачника соответствуют рекомендуемым темам практических занятий. Основная задача предлагаемых учебных пособий — оказание методической помощи студентам в их самостоятельной работе по изучению основ теории цепей. С этой целью около половины задач, включенных в каждый раздел сборника задач, сопровождаются решениями или методическими указаниями (номера таких задач оканчиваются на буквы «р» или «м»).

Основное отличие данного издания сборника задач от предыдущих заключается в том, что данное издание, сохранив в целом структуру и направленность предыдущих изданий, выполнено в виде электронного приложения к учебнику, что значительно увеличило удобство использования учебных пособий и позволило объединить оба пособия в единый учебно-методический комплекс. Работа по подготовке «Сборника задач» к печати распределилась между авторами следующим образом: главы 1—4 были написаны доцентом В. Н. Бирюковым, главы 5—10 — профессором В. И. Семенцовым, ряд задач во всех главах сборника были предложены профессором В. П. Поповым. Им же было произведено общее редактирование сборника. Доценты Н. И. Мережин, М. Н. Максимов и В. А. Ляшев проверили решения всех задач и произвели подготовку сборника к изданию.

Авторы выражают искреннюю благодарность всем коллегам, высказавшим замечания и пожелания по предыдущим изданиям сборника задач.

# Глава 1

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

### 1.1. Идеализированные пассивные элементы

**1.1р.** Начиная с момента времени  $t_0 = 0$  ток через идеализированный резистивный элемент сопротивлением  $R = 20$  Ом изменяется по закону  $i = 100e^{-2 \cdot 10^6 t} - 50e^{-0,5 \cdot 10^6 t}$  мА. Определите, как изменяются во времени напряжение на элементе, мгновенная мощность, потребляемая элементом, и рассеиваемая в нем энергия. Найдите значения соответствующих величин в моменты времени  $t_0 = 0$ ;  $t_1 = 0,25$  мкс;  $t_2 = 2$  мкс;  $t_3 = 10$  мкс.

**1.2.** Решите задачу 1.1р при  $i = 1 - e^{-10^6 t}$  мА.

**1.3р.** На рис. Т1.1 приведена зависимость от времени напряжения на идеализированном резистивном элементе. Постройте (качественно) график зависимости мгновенной мощности, потребляемой элементом, и энергии, рассеиваемой в элементе, от времени.

**1.4р.** Постройте (качественно) зависимости от времени тока идеализированного емкостного элемента для случаев, когда напряжение на элементе задается графиками, представленными на рис. Т1.2, а, б.

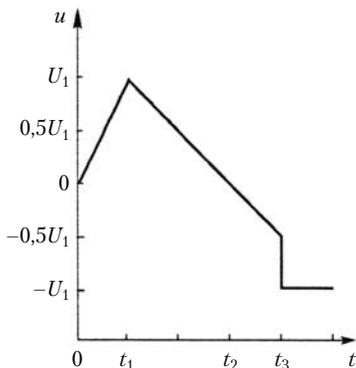


Рис. Т1.1

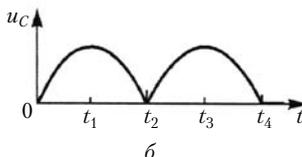
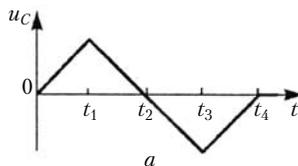
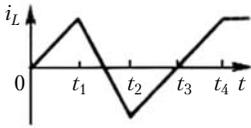
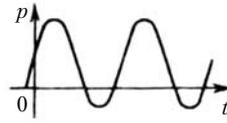


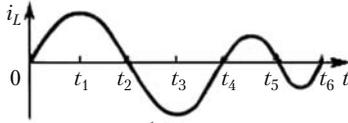
Рис. Т1.2



а



а



б

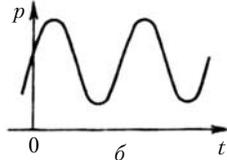


Рис. Т1.4

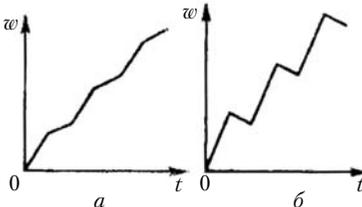
Рис. Т1.3

**1.5.** Изменение тока идеализированного индуктивного элемента во времени задано графически (рис. Т1.3, а, б). Постройте (качественно) зависимость напряжения на этом элементе от времени.

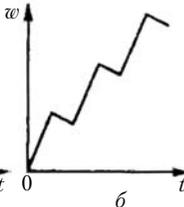
**1.6р.** На рис. Т1.4, а, б приведены зависимости от времени мгновенной мощности, потребляемой цепями, не содержащими источников энергии. Содержат ли эти цепи элементы, запасующие энергию?

**1.7м.** На рис. Т1.5, а, б показаны зависимости от времени энергии, поступающей в цепи, не содержащие источников энергии. Содержат ли эти цепи элементы, запасующие энергию? Достаточно ли данных для ответа?

**1.8р.** Мгновенная мощность, потребляемая идеализированным резистивным элементом, начинает с момента времени  $t = 0$  изменяться в соответствии с графиком на рис. Т1.6. Изобразите (качественно) зависимость от времени напряжения на этом элементе.



а



б

Рис. Т1.5

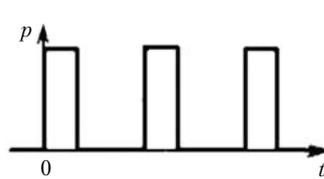


Рис. Т1.6

**1.9м.** Определите ток идеализированного индуктивного элемента  $L = 1$  мГн, если напряжение на нем имеет вид прямоугольного положительного импульса длительностью  $T = 1,2$  мкс:

$$u_L = \begin{cases} 0, & -\infty < t < t_0, \\ U_0, & t_0 \leq t < t_0 + T, \\ 0, & t_0 + T \leq t, \end{cases}$$

где  $U_0 = 10$  В.

**1.10р.** Идеализированный емкостный элемент, имеющий электрический заряд  $q = 0,1$  мКл, в момент времени  $t_0 = 0$  подключается к резистивному элементу, ток которого начинает изменяться по закону  $i = 0,1e^{-10^3t}$  А. Рассчитайте напряжение на емкостном элементе и запасенную в нем энергию в моменты времени  $t_0 = 0$  и  $t_1 = 1$  мс. Найдите энергию, рассеянную в резистивном элементе к моменту времени  $t_1$ . Параметры элементов:  $C = 1$  мкФ;  $R = 1$  кОм.

**1.11.** Ток индуктивного элемента  $L = 4,3$  мкГн изменяется по закону  $i_L = 0,2\sin(10^6t + 0,4\pi)$  А. Определите напряжение на элементе. Отдает или потребляет энергию элемент в момент времени  $t_1 = 1$  мкс?

**1.12.** Начиная с момента времени  $t_0 = 0$  ток индуктивного элемента  $L = 250$  мкГн определяется выражением  $i_L = 1 - 2e^{-2 \cdot 10^3t}$  мА. Вычислите напряжение на элементе и энергию магнитного поля, запасенную в нем в момент времени  $t_1 = 0,4$  мс.

### Решения и методические указания

**1.1р.** Напряжение на резистивном элементе  $u = Ri = 2e^{-2 \cdot 10^6t} - e^{-0,5 \cdot 10^6t}$  В; мгновенная мощность  $p = ui = 200e^{-4 \cdot 10^6t} - 200e^{-2,5 \cdot 10^6t} + 50e^{-10^6t}$  мВт; энергия, выделившаяся в элементе к моменту времени  $t$ ,  $w = \int_{t_0}^t p dt = 20 - 50e^{-4 \cdot 10^6t} + 80e^{-2,5 \cdot 10^6t} - 50e^{-10^6t}$  нДж.

В заданные моменты времени искомые величины имеют следующие значения

$t$ , мкс	0	0,25	2	10
$u$ , В	1	0,331	-0,331	-0,00674
$p$ , мВт	50	5,46	5,49	0,00227
$w$ , нДж	0	5,49	13,8	20

**1.3р.** На интервалах времени  $[0, t_1]$  и  $[t_1, t_3]$ , где напряжение изменяется по линейному закону, график мгновенной мощности представляет собой отрезки квадратичной параболы  $p(t) = u^2(t)/R$ , причем в момент времени  $t = t_2$ , когда

напряжение на резистивном элементе равно нулю, график  $p(t)$  проходит через нуль (рис. Т1.7, *a*). В точке  $t_3$  кривая  $p(t)$ , так же как и кривая  $u(t)$ , терпит разрыв первого рода. На участке  $t > t_3$   $p(t) = \text{const}$ , так как на этом участке  $u(t) = \text{const}$ .

На интервалах  $[0, t_1]$  и  $[t_1, t_3]$  зависимость рассеиваемой элементом энергии  $w(t)$  имеет вид отрезков кубических парабол, на интервале  $t > t_3$  — прямой линии (рис. Т1.7, *б*). В точке  $t_2$  энергия, рассеиваемая элементом, не возрастает ( $dw/dt = 0$ ) и касательная к графику  $w(t)$  параллельна оси времени. В точке  $t_3$  график  $w(t)$  имеет излом.

**1.4р.** Ток емкостного элемента определяется путем графического дифференцирования напряжения, так как  $i_C = Cdu_C/dt$ . Рисунок Т1.8, *a* соответствует случаю, когда напряжение на элементе изменяется, как показано на рис. Т1.2, *a*; рис. Т1.8, *б* соответствует случаю, когда кривая  $u_C(t)$  задается рис. Т1.2, *б*.

**1.6р.** Цепи, содержащие элементы, которые могут запастись энергией, могут в отдельные моменты времени отдавать энергию источнику, причем в эти моменты потребляемая мощность является отрицательной. Для рис. Т1.4, *a* ответ на вопрос, поставленный в задаче, положительный, для рис. Т1.4, *б* без дополнительных данных задачу решить нельзя.

**1.7м.** Учитывая, что мгновенная мощность  $p$  и энергия  $w$  связаны между собой соотношением  $p = dw/dt$ , устанавливаем, что для рис. Т1.5, *a* потребляемая цепью мгновенная

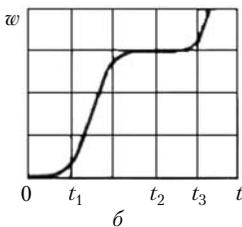
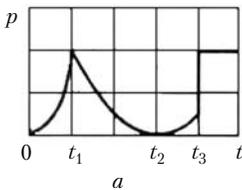


Рис. Т1.7

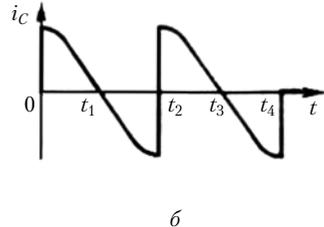
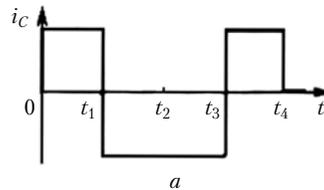


Рис. Т1.8

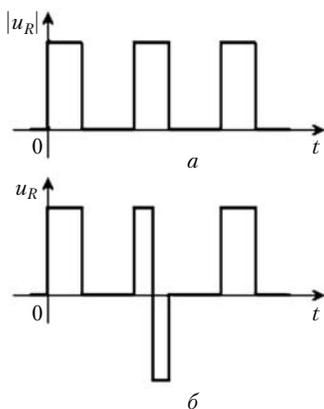


Рис. Т1.9

мощность положительна, а для рис. Т1.5, б периодически становится отрицательной (см. задачу 1.6р).

**1.8р.** Напряжение на резистивном элементе можно найти с точностью до знака:  $u_R(t) = \pm \sqrt{pR}$  (рис. Т1.9, а). Один из множества графиков  $u_R(t)$  приведен на рис. Т1.9, б.

**1.9м.** Зависимость  $u_L(t)$  задана на трех интервалах: 1)  $-\infty < t < t_0$ ; 2)  $t_0 \leq t < t_0 + T$ ; 3)  $t \geq t_0 + T$ . Ток индуктивного элемента на этих интервалах:

$$1) i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt;$$

$$2) i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u_L dt + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L dt;$$

$$3) i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u_L dt + \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t_0+T} u_L dt + \frac{1}{L} \int_{t_0+T}^t u_L dt.$$

**1.10р.** В произвольный момент времени  $t > t_0$   $u_C = u_C(t_0) - \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt$ ;  $w_C = Cu_C^2/2$  (емкостный элемент отдает энергию,

поэтому его ток направлен противоположно напряжению). Для  $t_0$   $u_C(t_0) = q(t_0)/C = 100$  В;  $w_C(t_0) = 5$  мДж; для  $t_1$   $u_C(t_1) = 36,8$  В;  $w_C(t_1) = 0,677$  мДж. Энергия, выделившаяся в резистивном элементе на интервале  $[t_0, t_1]$ , может быть определена из выражения  $w_R(t_1) = \int_{t_0}^t Ri_R^2 dt$  или на основании закона сохранения энергии  $w_R(t_1) = w_C(t_0) - w_C(t_1) = 4,32$  мДж.

## 1.2. Идеализированные активные элементы

**1.13р.** Внешняя характеристика источника электрической энергии приведена на рис. Т1.10. Запишите аналитическое выражение для этой характеристики. Определите параметры элементов последовательной и параллельной схем замещения источника.

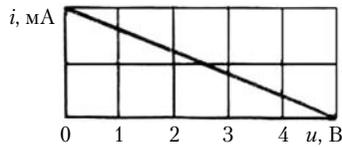


Рис. Т1.10

**1.14.** Найдите параметры элементов последовательной схемы замещения источника электрической энергии, имеющего следующие параметры элементов параллельной схемы замещения:  $G_i = 0,42$  мСм;  $j = 2,82$  мА.

**1.15.** Преобразуйте последовательную схему замещения источника энергии, ЭДС которого равна 12,6 В, а внутреннее сопротивление — 1,5 кОм, в параллельную. Определите параметры элементов параллельной схемы замещения.

**1.16р.** Запишите аналитические выражения для внешних характеристик источников электрической энергии, схемы которых приведены на рис. Т1.11,  $a - z$ .

**1.17р.** Напряжение источника электрической энергии при сопротивлении нагрузки  $R_{н1} = 1$  МОм  $u_1 = 9,38$  В. При уменьшении сопротивления нагрузки до значения  $R_{н2} = 0,1$  МОм напряжение источника снижается до  $u_1 = 6,78$  В. Определите параметры элементов последовательной и параллельной схем замещения источника.

**1.18.** При сопротивлении нагрузки  $R_{н1} = 5$  кОм ток источника электрической энергии  $i_1 = 0,186$  мА, при  $R_{н2} = 10$  кОм  $i_2 = 0,105$  мА. Рассчитайте параметры элементов параллельной схемы замещения источника.

**1.19.** В режиме холостого хода напряжение на зажимах источника энергии равно 12,6 В. При подключении к источнику нагрузки сопротивлением  $R_n = 0,5$  Ом напряжение источника падает до 10,3 В. Определите внутреннее сопротивление источника.

**1.20.** В каких пределах должно лежать значение внутреннего сопротивления источника энергии, чтобы при из-

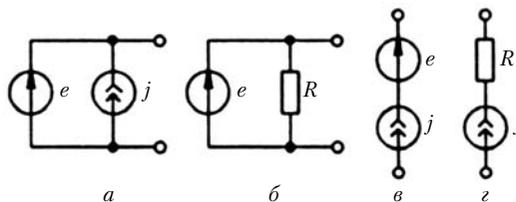


Рис. Т1.11

менении тока нагрузки в пределах от 0 до 1 А напряжение на зажимах источника не падало бы ниже 98 В? Напряжение источника в режиме холостого хода равно 100 В.

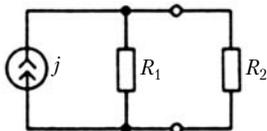


Рис. Т1.12

**1.21.** Найдите токи элементов  $R_1$ ,  $R_2$  цепи, схема которой приведена на рис. Т1.12. Параметры элементов:  $R_1 = 2$  кОм,  $R_2 = 4$  кОм,  $j = 0,12$  А.

### Решения и методические указания

**1.13р.** Зависимость тока источника от напряжения в рассматриваемом случае имеет линейный характер. Аналитическое выражение для такой зависимости можно получить, записав уравнение прямой линии в отрезках:  $\frac{i}{i|_{u=0}} + \frac{u}{u|_{i=0}} = 1$ .

Определив по графику рис. Т1.10  $i|_{u=0} = i_k = 10^{-3}$  А,  $u|_{i=0} = u_x = 5$  В, получим  $10^3 i + 0,2 u = 1$ . Параметры элементов параллельной схемы замещения:  $j = i_k = 1$  мА;  $G_i = i_k / u_x = 0,2$  мСм. Параметры элементов последовательной схемы замещения:  $e = u_x = 5$  В;  $R_i = 1 / G_i = 5$  кОм.

**1.16р.** К зажимам цепей, изображенных на рис. Т1.11, а, б, подключен источник напряжения  $e$ , следовательно, напряжение на внешних зажимах этих цепей всегда будет равно ЭДС источника  $e$ . Таким образом, внешние характеристики цепей рис. Т1.11, а, б совпадают с внешней характеристикой входящего в них источника напряжения  $u = e$ , а источник тока (см. рис. Т1.11, а) и сопротивление (см. рис. Т1.11, б), подключенные параллельно источнику напряжения, не влияют на внешние характеристики этих цепей и могут быть исключены из соответствующих схем замещения.

Ток через внешние выводы цепей рис. Т1.11, в, г при любом напряжении на них равен току источника  $j$ , следовательно, внешние характеристики этих цепей совпадают с внешней характеристикой источника тока  $i = j$ . Таким образом, источник ЭДС (см. рис. Т1.11, в) и сопротивление (см. рис. Т1.11, г), включенные последовательно с источником тока, не влияют на внешние характеристики соответствующих цепей и могут быть исключены из рассмотрения.

**1.17р.** Напряжение на зажимах источника энергии, подключенного к произвольному сопротивлению нагрузки  $R_n$ , может быть выражено через параметры элементов последовательной схемы замещения источника (рис. Т1.13):  $u = R_n i =$

$= R_n e / (R_n + R_i)$ . Подставив в это выражение  $R_n = R_{n1} = 1 \text{ МОм}$ ,  $u = u_1 = 9,38 \text{ В}$  и  $R_n = R_{n2} = 0,1 \text{ МОм}$ ,  $u = u_2 = 6,78 \text{ В}$ , получим систему двух уравнений:  $1 \cdot 10^6 e / (1 \cdot 10^6 + R_i) = 9,38$ ;  $0,1 \cdot 10^6 e / (0,1 \cdot 10^6 + R_i) = 6,78$ , откуда  $e = 9,8 \text{ В}$ ,  $R_i = 44,5 \text{ кОм}$ ;  $j = e / R_i = 0,22 \text{ мА}$ ;  $G_i = R_i^{-1} = 22,5 \text{ мкСм}$ .

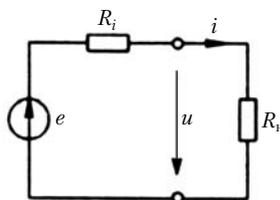


Рис. Т1.13

### 1.3. Компонентные и топологические уравнения электрических цепей

**1.22р.** Составьте уравнения баланса токов для всех узлов цепи, схема которой приведена на рис. Т1.14. Убедитесь, что полученные уравнения являются зависимыми.

**1.23.** Составьте все возможные уравнения баланса напряжений для цепи, приведенной в предыдущей задаче. Убедитесь, что полученные уравнения являются зависимыми.

**1.24.** Составьте все возможные уравнения баланса токов и напряжений для цепи, показанной на рис. Т1.15. Запишите компонентные уравнения и основную систему уравнений электрического равновесия этой цепи.

**1.25р.** Составьте расширенный и сокращенный графы цепи, схема которой приведена на рис. Т1.14.

**1.26р.** Для сокращенного графа цепи, рассмотренной в задаче 1.25р, постройте несколько различных деревьев. Выделите системы главных контуров, соответствующих каждому из деревьев.

**1.27р.** Найдите главные сечения графа, соответствующие дереву цепи, рассмотренной в задаче 1.26р, в состав которого входят ветви 1, 2, 4, 8.

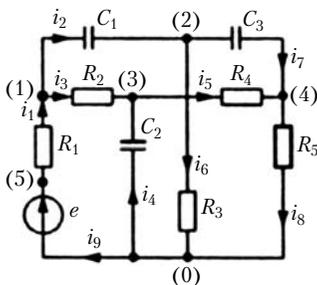


Рис. Т1.14

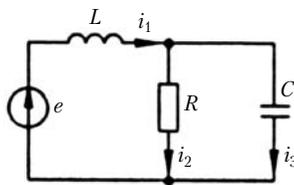


Рис. Т1.15

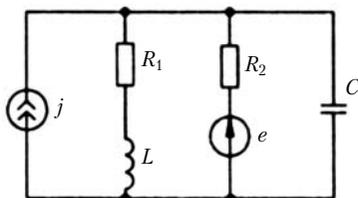


Рис. Т1.16

**1.28р.** Для цепи, схема которой приведена на рис. Т1.16, определите общее число неизвестных токов и напряжений, а также число линейно независимых уравнений баланса токов и напряжений при использовании расширенного топологического описания. Составьте основную систему уравнений электрического равновесия цепи.

**1.29р.** Решите задачу 1.28р при использовании сокращенного топологического описания цепи.

**1.30.** Составьте основную систему уравнений электрического равновесия цепи, рассмотренной в задаче 1.22.

**1.31.** Составьте основную систему уравнений для цепей, схемы которых приведены на рис. Т1.17, а, б.

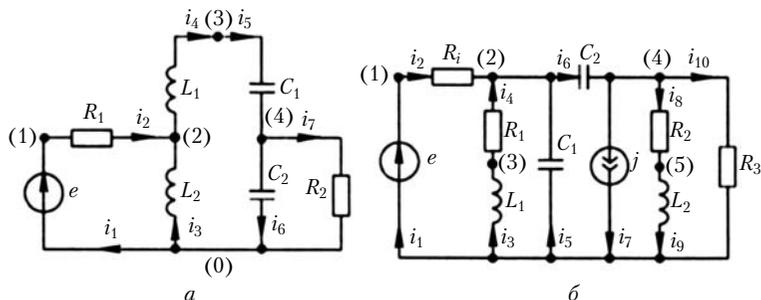


Рис. Т1.17

**1.32р.** Для цепи, схема которой приведена на рис. Т1.15, составьте дифференциальное уравнение относительно тока.

**1.33.** Решите задачу 1.32р, заменив источник напряжения источником тока.

### Решения и методические указания

**1.22р.** На основании первого закона Кирхгофа можно составить уравнения баланса токов для всех узлов рассматриваемой цепи:

$$\begin{aligned}
 -i_1 + i_2 + i_3 &= 0; & -i_2 + i_6 + i_7 &= 0; & -i_3 - i_4 + i_5 &= 0; \\
 -i_5 - i_7 + i_8 &= 0; & i_1 - i_9 &= 0; & i_4 - i_6 - i_8 + i_9 &= 0.
 \end{aligned}$$

Полученные уравнения являются зависимыми, так как любое из них можно получить, суммируя остальные уравнения и умножая обе части полученного равенства на  $-1$ .

**1.25р.** Расширенный и сокращенный графы цепи изображены соответственно на рис. Т1.18, а, б. При переходе от расширенного графа цепи к сокращенному устранен узел 5, а ветви 1 и 9 заменены одной ветвью 1.

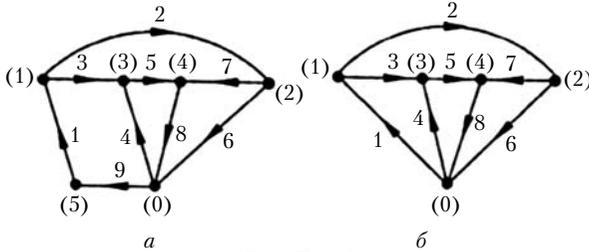


Рис. Т1.18

**1.26р.** Некоторые из различных деревьев графа приведены на рис. Т1.19, а — з. Главные контуры графа, соответствующие дереву, изображенному на рис. Т1.19, а, приведены на рис. Т1.20, а — з.

**1.27р.** Линии сечения, соответствующие главным сечениям графа, показаны на рис. Т1.21. Номера линий сечения совпадают с номерами соответствующих ветвей дерева. Ветви дерева показаны сплошными линиями, а главные ветви — штриховыми. Как очевидно из рис. Т1.21, в главное сечение 1 входят ветви 1, 3, 6, 7; в главное сечение 2 — ветви 2, 6, 7; в главное сечение 4 — ветви 3, 4, 5; в главное сечение 8 — ветви 5, 7, 8.

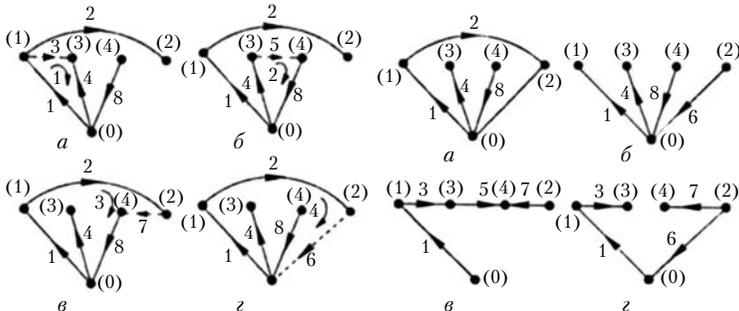


Рис. Т1.19

Рис. Т1.20

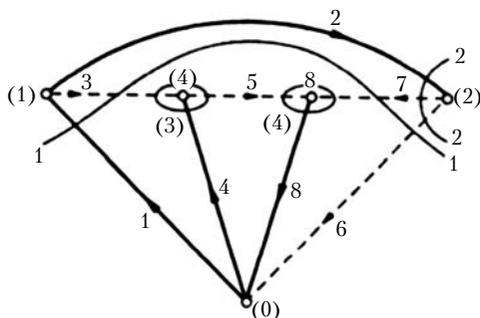


Рис. Т1.21

**1.28р.** При использовании расширенного топологического описания цепи рис. Т1.22, а каждый из идеализированных элементов цепи рассматривается в качестве отдельной ветви. В данном случае число ветвей, входящая в цепь  $p = 6$ , число узлов  $q = 4$ , число ветвей, содержащих источник тока  $p_{\text{ит}} = 1$ , число ветвей, составленных только из источников напряжения  $p_{\text{ин}} = 1$ . Общее число неизвестных токов и напряжений ветвей равно  $2p - p_{\text{ит}} - p_{\text{ин}} = 10$ . Для данной цепи при расширенном топологическом описании можно составить  $m = q - 1 = 3$  независимых уравнения баланса токов, например  $-i_1 + i_2 + i_4 + i_6 = 0$ ;  $-i_2 + i_3 = 0$ ,  $i_4 + i_5 = 0$ , где  $i_1 = j$ , а также  $n = p - q + 1 = 3$  независимых уравнения баланса напряжений, например  $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ ;  $u_2 + u_3 - u_4 = e$ ;  $u_2 + u_3 - u_6 = 0$ , где  $u_1 = -u_j$ . Здесь номера и направления напряжений ветвей совпадают с номерами и направлениями соответствующих токов. Основная система уравнений электрического равновесия включает шесть указанных ранее топологических уравнений и четыре компонентных уравнения:  $u_2 = R_1 i_2$ ;  $u_3 = L di_3/dt$ ;  $u_4 = R_2 i_4$ ;  $i_6 = C du_6/dt$ .

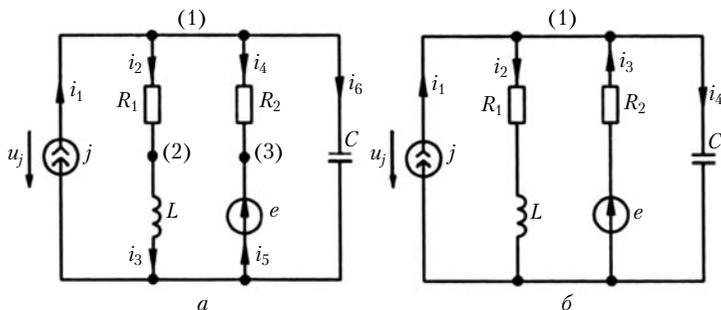


Рис. Т1.22

**1.29р.** При использовании сокращенного топологического описания (рис. Т1.22, б) группы последовательно включенных элементов рассматриваются в качестве отдельных ветвей. В данном случае число ветвей цепи  $p = 4$ , число узлов  $q = 2$ , а число ветвей, содержащих источник тока,  $p_{\text{ит}} = 1$ . В цепи нет ветвей, составленных только из источников напряжения, поэтому  $p_{\text{ин}} = 0$ . Для рассматриваемой цепи можно составить одно независимое уравнение баланса токов  $-i_1 + i_2 - i_3 + i_4 = 0$ , где  $i_1 = j$ , три независимых уравнения баланса напряжений  $u_1 + u_2 = 0$ ;  $u_2 + u_3 = 0$ ;  $u_3 + u_4 = 0$ , где  $u_1 = -u_j$ , а также три компонентных уравнения  $u_2 = R_1 i_2 + L di_2/dt$ ;  $i_4 = C du_4/dt$ ;  $u_3 = R_2 i_3 - e$ . Таким образом, общее число неизвестных токов и напряжений и соответственно общее число уравнений, входящих в основную систему уравнений электрического равновесия цепи,  $2p - p_{\text{ит}} - p_{\text{ин}}$  уменьшилось по сравнению с расширенным топологическим описанием с 10 до 7 (число уравнений баланса токов уменьшилось на 2, а число компонентных уравнений уменьшилось на 1). Обращаем внимание на то, что при переходе от расширенного топологического описания к сокращенному числу независимых уравнений баланса напряжений не изменилось, а компонентные уравнения второй и третьей ветвей существенно усложнились.

**1.32р.** Дифференциальное уравнение цепи относительно тока  $i_3$  получается путем дифференцирования и исключения остальных неизвестных из основной системы уравнений электрического равновесия данной цепи, составленной при решении задачи 1.24:

$$\frac{d^2 i_3}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{LC} i_3 = \frac{1}{L} \frac{de}{dt}.$$

## Глава 2

# ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

### 2.1. Гармонические функции. Метод комплексных амплитуд

**2.1.** Определите амплитуду, действующее значение, период, частоту, угловую частоту и начальную фазу гармонических напряжения и тока, графики которых приведены на рис. Т2.1, а, б.

**2.2м.** Найдите амплитуду, действующее значение, частоту, угловую частоту и начальную фазу следующих гармонических напряжений:  $u_1 = 5\cos(10^4t + 60^\circ)$  В;  $u_2 = 5\sqrt{2}\cos(2\pi 10^4t - 60^\circ)$  В;  $u_3 = 4,24\sin(100\pi t + \pi/6)$  В. Определите значение напряжения в момент времени  $t_1 = 0,1$  мс.

**2.3м.** Найдите амплитуды, действующие значения, комплексные амплитуды, комплексные действующие значения и мгновенные комплексы для заданных гармонических напряжений и токов  $u_1 = 10\cos(\omega t + 30^\circ)$  В;  $u_2 = 3\sqrt{2}\cos(\omega t - 60^\circ)$  В;  $u_3 = \sqrt{2} \cdot 1,2 \cdot 10^{-3}\cos(\omega t - \pi/3)$  В;  $u_4 = 11,3\sin(\omega t + 62^\circ)$  В;  $i_1 = 3\cos(\omega t - 214^\circ)$  А;  $i_5 = 0,5 \cdot 10^{-6}\sin \omega t$  А;  $i_3 = 0,1\cos \omega t$  А;  $i_4 = 1,41\cos(\omega t - 180^\circ)$  А.

**2.4.** Определите комплексные амплитуды, комплексные действующие значения и мгновенные комплексы функций, изображенных на рис. Т2.1, а, б.

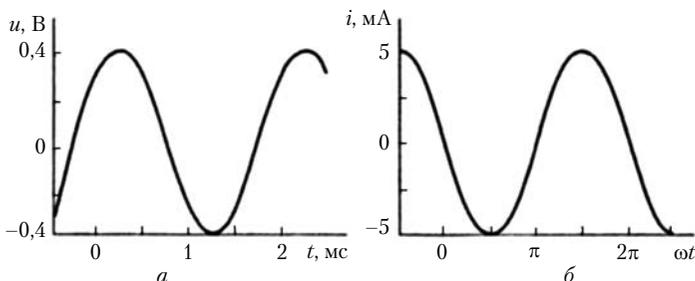


Рис. Т2.1

**2.5.** Переведите комплексные действующие значения токов из показательной формы в алгебраическую:  $\dot{I}_1 = 0,2e^{j2,5^\circ}$  А;  $\dot{I}_2 = 24 \cdot 10^{-6}e^{-j67^\circ}$  А;  $\dot{I}_3 = 9,4e^{j188^\circ}$  А;  $\dot{I}_4 = 0,71e^{j266^\circ}$  А;  $\dot{I}_5 = 0,82 \cdot 10^{-4}e^{j282^\circ}$  А;  $\dot{I}_6 = 0,35e^{j145^\circ}$  А;  $\dot{I}_7 = 2,8 \cdot 10^{-2}e^{j45^\circ}$  А;  $\dot{I}_8 = 47 \cdot 10^{-5}e^{-j124^\circ}$  А.

**2.6.** Перейдите от алгебраической формы записи комплексного действующего значения напряжения к показательной, если  $\dot{U}_1 = -2,54 - j0,923$  В;  $\dot{U}_2 = 53,2 + j9,38$  В;  $\dot{U}_3 = -0,5 - j0,5$  В;  $\dot{U}_4 = -37$  В;  $\dot{U}_5 = -j0,144$  В;  $\dot{U}_6 = -52,1 - j295$  мВ;  $\dot{U}_7 = 68,2 + j73,1$  мВ;  $\dot{U}_8 = 139 - j990$  мВ;  $\dot{U}_9 = 1,12 - j0,043$  В.

**2.7м.** Для заданных комплексных действующих значений или комплексных амплитуд напряжения найдите мгновенные значения напряжения. Угловая частота  $\omega$  всех напряжений одинакова. Постройте временные диаграммы следующих напряжений:  $\dot{U}_{m1} = 7,5e^{j\pi/4}$  В;  $\dot{U}_2 = 0,56e^{j124^\circ}$  В;  $\dot{U}_3 = 50$  мВ;  $\dot{U}_4 = 3 \cdot 10^{-3}e^{-j45^\circ}$  В;  $\dot{U}_{m5} = 48\sqrt{2}$  В;  $\dot{U}_{m6} = 14,7 + j16,3$  В;  $\dot{U}_{m7} = 14,7 - j16,3$  В;  $\dot{U}_{m8} = -14,7 + j16,3$  В;  $\dot{U}_{m9} = -14,7 - j16,3$  В;  $\dot{U}_{10} = 707 - j0,12$  В;  $\dot{U}_{11} = 6,6 \cdot 10^{-8} + j2,42 \cdot 10^{-4}$  В;  $\dot{U}_{m12} = 3 + j0,15$  В.

**2.8м.** Определите мгновенные значения тока (угловая частота  $\omega$  всех токов одинакова) для заданных комплексных действующих значений или комплексных амплитуд тока:  $\dot{I}_{m1} = 5 - j16$  А;  $\dot{I}_2 = (3 - j0,2) \cdot 10^{-3}$  А;  $\dot{I}_3 = -6 + j3$  А;  $\dot{I}_{m4} = 5$  А;  $\dot{I}_{m5} = -j3 \cdot 10^{-3}$  А;  $\dot{I}_6 = j16,1$  А.

**2.9м.** Найдите комплексные амплитуды токов, заданных соотношениями: а)  $\dot{I}_{m1} = \dot{I}_{m2} + \dot{I}_{m3}$ ; б)  $\dot{I}_{m1} = \dot{I}_{m2} - \dot{I}_{m3}$ ; в)  $\dot{I}_{m1} = \dot{I}_{m4} + \dot{I}_{m5} + \dot{I}_{m6} + \dot{I}_{m7}$ ; г)  $\dot{I}_{m1} = \dot{I}_{m5} + \dot{I}_{m7}$ ; если  $\dot{I}_{m2} = 2,71e^{j47^\circ}$  А;  $\dot{I}_{m3} = 8,54e^{j168^\circ}$  А;  $\dot{I}_{m4} = 0,71e^{j54,7^\circ}$  А;  $\dot{I}_{m5} = 7,31e^{-j5,02^\circ}$  А;  $\dot{I}_{m6} = 3,32e^{j145,6^\circ}$  А;  $\dot{I}_{m7} = 5,27e^{j200,2^\circ}$  А.

**2.10р.** Докажите, что равенство  $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3$  не выполняется, когда: а)  $\dot{I}_1 = 10e^{j30^\circ}$  А;  $\dot{I}_2 = 5e^{j60^\circ}$  А;  $\dot{I}_3 = 15,2e^{j48^\circ}$  А; б)  $\dot{I}_1 = 10e^{j30^\circ}$  А;  $\dot{I}_2 = 5e^{j60^\circ}$  А;  $\dot{I}_3 = 14,5e^{j26^\circ}$  А.

**2.11м.** Комплексное действующее значение тока задано в виде суммы:  $\dot{I} = 2,43e^{j53^\circ} - 0,88e^{-j37^\circ} - 1,03e^{j53^\circ}$  А. Найдите амплитуду и начальную фазу тока.

**2.12.** Запишите в показательной форме комплексные амплитуды напряжений, заданных следующими соотношениями:  $\dot{U}_{m1} = 10e^{j30^\circ} + 5e^{j60^\circ}$  В;  $\dot{U}_{m2} = 10e^{j30^\circ} - 5e^{j60^\circ}$  В;  $\dot{U}_{m3} = (-6 + j3)(5 - j2)$  В;  $\dot{U}_{m4} = (-6 + j3)/(5 - j2)$  В.

## Решения и методические указания

**2.2м.** При определении начальной фазы гармонического напряжения  $u_3$ , необходимо перейти от синусоидальной функции времени к косинусоидальной:  $\sin x = \cos(x - \pi/2)$ .

**2.3м.** См. указание к задаче 2.2м.

**2.7м.** Для нахождения мгновенного значения напряжения необходимо от алгебраической формы записи комплексной амплитуды или комплексного действующего значения перейти к показательной.

**2.8м.** См. указание к задаче 2.7м.

**2.9м.** Для выполнения операции сложения и вычитания комплексных числа следует представить в алгебраической форме.

**2.10р.** а) Модуль суммы двух комплексных чисел не может превышать сумму модулей слагаемых; б) равенство может иметь место только при  $\psi_1 < \psi_3 < \psi_2$ .

**2.11м.** При решении задачи можно перейти к алгебраической форме записи комплексных чисел, однако если аргументы слагаемых равны или отличаются на  $\pi$ , то следует воспользоваться равенствами  $|A|e^{j\alpha} + |B|e^{j\alpha} = (|A| + |B|)e^{j\alpha}$ ,  $|A|e^{j\alpha} + |B|e^{j(\alpha+\pi)} = (|A| - |B|)e^{j\alpha} = (-|A| + |B|)e^{j(\alpha+\pi)}$ . Если модули слагаемых равны, а аргументы отличаются на  $\pi/2$ , то  $|A|e^{j\alpha} + |A|e^{j(\alpha+\pi/2)} = \sqrt{2}|A|e^{j(\alpha+\pi/4)}$ .

## 2.2. Идеализированные пассивные элементы при гармоническом воздействии

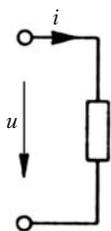


Рис. Т2.2

**2.13м.** К зажимам идеализированного пассивного элемента (рис. Т2.2) приложено напряжение  $u = 0,24 \cos(1885t + 74^\circ)$  мВ. Определите тип и параметры элемента, если:

- $i = 2,8 \cos(1885t + 74^\circ)$  мкА;
- $i = 2,8 \cos(1885t + 164^\circ)$  мкА;
- $i = 2,8 \cos(1885t + 344^\circ)$  мкА.

**2.14.** Рассчитайте комплексные входные сопротивление и проводимость цепи, ток и напряжение на входе которой:

- $i = 7,07 \cdot 10^{-3} \cos(10^3t + \pi/3)$  А;  $u = 14,14 \cos(10^3t + \pi/2)$  В;
- $i = 0,282 \cos(100\pi t + 60^\circ)$  А;  $u = 50 \cos(100\pi t)$  В;
- $i = 5 \cos(3140t + 90^\circ)$  мкА;  $u = 0,4 \cos(3140t + 45^\circ)$  В;
- $i = 2,8 \cos(1885t + 164^\circ)$  мкА;  $u = 0,24 \cos(1885t + 74^\circ)$  мВ.

**2.15м.** Определите резистивную  $g$  и реактивную  $b$  составляющие комплексной входной проводимости цепи, если  $Z_1 = 3 + j5$  Ом;  $Z_2 = 5 + j3$  Ом;  $Z_3 = 2,4 - j8,2$  кОм;  $Z_4 = 50e^{j30^\circ}$  Ом;  $Z_5 = 480e^{-j74^\circ}$  Ом;  $Z_6 = 2,8$  кОм;  $Z_7 = 125e^{j90^\circ}$  Ом.

**2.16м.** Рассчитайте резистивную  $r$  и реактивную  $x$  составляющие комплексного входного сопротивления цепи, если  $Y_1 = 44 - j18$  мСм;  $Y_2 = j0,12$  См;  $Y_3 = (29 + j51) \cdot 10^{-4}$  См;  $Y_4 = 15e^{j17,3^\circ}$  мСм.

**2.17.** К идеализированному емкостному элементу  $C_1 = 0,5$  мкФ приложено напряжение  $u = 8,5\cos(10^6t + \pi/2)$  В. Определите комплексное входное сопротивление элемента, комплексную входную проводимость, сдвиг фаз между напряжением и током, комплексную амплитуду и комплексное действующее значение тока. Вычислите энергию  $w$ , запасенную в емкостном элементе в момент времени  $t = 2,5 \cdot 10^{-6}$  с, а также максимальное значение запасаемой энергии. При каких значениях  $t$  запасаемая энергия равна половине максимальной? Найдите значения тех же величин, если  $C_2 = 0,1C_1$ .

**2.18.** Ток через индуктивный элемент  $L = 24$  мкГн изменяется по косинусоидальному закону  $i = 0,15\cos(10^6t + 60^\circ)$  А. Определите комплексное входное сопротивление элемента и комплексное действующее значение напряжения на нем. Запишите выражение для мгновенного значения напряжения  $u$ . Рассчитайте энергию  $w$ , запасенную в индуктивном элементе в момент времени  $t = 1$  мкс. В какие моменты времени запасаемая энергия равна 0,1 от своего максимального значения?

**2.19.** Начиная с момента  $t_0 = 0$  ток через резистивный элемент ( $R = 50$  кОм) изменяется по следующему закону:  $i = 2 \cos(10^6t - 60^\circ)$  мА. Найдите комплексное действующее значение напряжения  $\dot{U}$ , активную мощность  $P_A$  и энергию  $w$ , рассеянную в резистивном элементе к моментам времени  $t_1 = 1$  мкс;  $t_2 = 1$  с.

### Решения и методические указания

**2.13м.** Если сдвиг фаз между напряжением и током на зажимах идеализированного пассивного элемента цепи равен 0,  $-\pi/2$  или  $\pi/2$ , то такой элемент будет соответственно резистивным, емкостным или индуктивным. Значение параметра элемента определяется из равенства его полного сопротивления  $[R, 1/(\omega C)$  или  $\omega L]$  и полного входного сопротивления элемента  $z_{вх} = U/I$ .

**2.15м.** В общем случае  $g = \operatorname{Re}[1/Z]$  и  $b = \operatorname{Im}[1/Z]$ . Если комплексное сопротивление задано в показательной форме, то следует пользоваться соотношениями  $g = z^{-1}\cos(-\varphi)$ ;  $b = z^{-1}\sin(-\varphi)$ , а если в алгебраической — соотношениями  $g = r/(r^2 + x^2)$ ,  $b = -x/(r^2 + x^2)$ .

**2.16м.** В общем случае  $r = \operatorname{Re}[1/Y]$  и  $x = \operatorname{Im}[1/Y]$ . В зависимости от того, в какой форме задана комплексная проводимость, в показательной или алгебраической, расчет производят с помощью выражений  $r = y^{-1}\cos(-\vartheta)$ ;  $x = y^{-1}\sin(-\vartheta)$  или  $r = g/(g^2 + b^2)$ ;  $x = -b/(g^2 + b^2)$ .

### 2.3. Анализ простейших линейных цепей при гармоническом воздействии

**2.20.** Для цепи рис. Т1.17, а составьте основную систему уравнений электрического равновесия в комплексной форме.

**2.21.** Для цепи рис. Т1.15 составьте основную систему уравнений электрического равновесия в комплексной форме. Исключая из полученной системы напряжения элементов, составьте систему уравнений для определения токов ветвей.

**2.22.** Для цепи рис. Т1.14 составьте линейные независимые уравнения баланса токов и напряжений ветвей в комплексной форме.

**2.23.** Составьте уравнения электрического равновесия для определения комплексных амплитуд токов ветвей цепи рис. Т2.3.

**2.24м.** К зажимам цепи, состоящей из последовательно включенных резистивного ( $R = 40 \text{ Ом}$ ) и индуктивного элементов ( $L = 0,24 \text{ мГн}$ ), приложено напряжение  $u = 100\cos \omega t \text{ В}$ . Определите комплексное входное сопротивление цепи  $Z_{\text{вх}}$

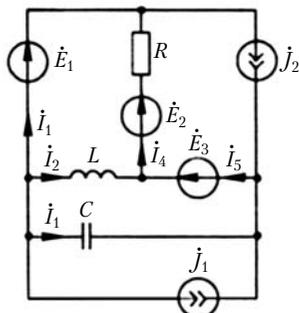


Рис. Т2.3

и комплексную амплитуду тока  $\dot{I}_m$ , если частота воздействия  $f_1 = 20 \text{ Гц}$ ;  $f_2 = 20 \text{ кГц}$ .

**2.25м.** Найдите комплексные амплитуды напряжений на элементах цепи, приведенной в задаче 2.24м. Постройте векторную диаграмму для частоты  $f_2$ .

**2.26р.** В последовательной  $RL$ -цепи известны действующие значения напряжений элементов:  $U_R = 5 \text{ В}$ ;  $U_L = 3,12 \text{ В}$ . Вычислите

### 2.3. Анализ простейших линейных цепей при гармоническом воздействии 23

действующее значение напряжения на входе цепи и сдвиг фаз между входным током и напряжением  $\varphi = \psi_u - \psi_i$ .

**2.27р.** В последовательной  $RC$ -цепи известны действующие значения напряжений:  $U_R = 0,707$  В;  $U_{\text{вх}} = 1$  В. Определите постоянную времени цепи  $\tau = RC$ , если угловая частота внешнего воздействия  $\omega = 10^6$  рад/с.

**2.28р.** Найдите входные комплексные проводимость  $Y_{\text{вх}}$  и сопротивление  $Z_{\text{вх}}$  цепи, состоящей из параллельно включенных резистивного ( $R = 40$  Ом) и индуктивного ( $L = = 240$  мкГн) элементов на частоте  $\omega = 126 \cdot 10^6$  рад/с.

**2.29м.** Определите комплексные входные сопротивление  $Z_{\text{вх}}$  и проводимость  $Y_{\text{вх}}$  цепи, состоящей из параллельно соединенных резистивного ( $R = 1,2$  кОм) и емкостного ( $C = 0,5$  нФ) элементов на частоте  $f = 120$  кГц.

**2.30м.** К цепи, рассмотренной в задаче 2.28р, подключен источник тока  $j = 2\cos(126 \cdot 10^6 t - 37,1^\circ)$  А. Определите комплексные амплитуды напряжений и токов элементов цепи. Постройте векторную диаграмму напряжений и токов цепи.

**2.31р.** Определите комплексное входное сопротивление цепи рис. Т2.4, если  $L = 0,1$  Гн;  $C = 0,2$  мкФ;  $R = 40$  кОм;  $\omega = 10^4/\sqrt{2}$  рад/с.

**2.32.** Найдите действующее значение напряжения на индуктивном элементе последовательной  $RL$ -цепи. Действующие значения напряжений на резистивном элементе и входе цепи соответственно  $U_R = 30$  мВ,  $U_{\text{вх}} = 50$  мВ.

**2.33.** Две последовательные цепи  $R_1L_1$ ,  $R_2L_2$  и индуктивный элемент  $L_3$  присоединены параллельно к двум зажимам. Найдите комплексное входное сопротивление цепи при  $R_1 = 100$  Ом;  $R_2 = 10$  Ом;  $L_1 = L_2 = L_3 = 1$  мГн;  $\omega = 10^4$  рад/с.

**2.34м.** Рассчитайте частоту, на которой реактивная составляющая комплексного входного сопротивления цепи равна нулю. Схема цепи приведена на рис. Т2.4, где  $L = 0,1$  Гн;  $C = 0,2$  мкФ;  $R = 2$  кОм.

**2.35.** На какой частоте равны между собой резистивная и реактивная составляющие комплексного входного сопротивления цепи, приведенной в задаче 2.29м? На какой частоте полное сопротивление цепи меньше своего максимального значения в 2 раза?

**2.36р.** Для цепи рис. Т2.5 определите комплексные действующие значения токов ветвей и напряжений элементов. Постройте

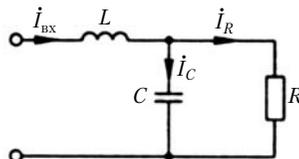


Рис. Т2.4

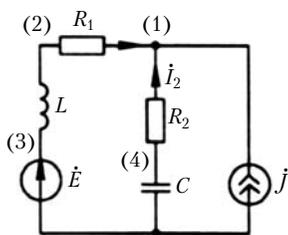


Рис. T2.5

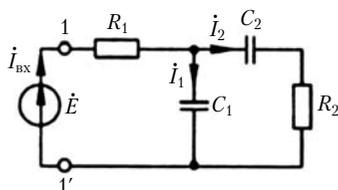


Рис. T2.6

векторные диаграммы токов и напряжений. Параметры элементов цепи:  $\dot{E} = 2 \text{ В}$ ;  $\dot{j} = 4 \text{ мА}$ ;  $R_1 = 1 \text{ кОм}$ ;  $R_2 = 3 \text{ кОм}$ ;  $L = 2 \text{ мГн}$ ;  $C = 3 \text{ нФ}$ ;  $\omega = 10^6 \text{ рад/с}$ .

**2.37м.** Для цепи рис. T2.6 определите комплексное входное сопротивление цепи относительно зажимов  $1 - 1'$  и комплексное действующее значение входного тока. Параметры элементов цепи:  $R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$ ;  $C_1 = 91 \text{ пф}$ ;  $C_2 = 1,8 \text{ нФ}$ ;  $\dot{E} = 2,11e^{j13,3^\circ} \text{ В}$ ;  $f = 1 \text{ МГц}$ .

**2.38р.** В цепи, рассмотренной в предыдущей задаче, известно комплексное действующее значение напряжения  $\dot{U}_{R2} = 1 \text{ В}$ . Определите комплексные действующие значения токов и напряжений всех элементов цепи. Постройте векторные диаграммы.

**2.39м.** Определите комплексные действующие значения токов ветвей и напряжений элементов цепи. Постройте векторные диаграммы всех токов и напряжений цепи. Схема цепи приведена на рис. T2.7, параметры ее элементов:  $R = 1 \text{ кОм}$ ;  $L = 2 \text{ мГн}$ ;  $C = 2 \text{ нФ}$ ;  $\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = 1 \text{ В}$ ;  $\dot{E}_3 = 2 \text{ В}$ ;  $\dot{j} = 2 \text{ мА}$ ;  $\omega = 10^6 \text{ рад/с}$ .

**2.40м.** Найдите входное сопротивление цепи (рис. T2.8), если  $R_1 = R_2 = R_6 = 4 \text{ кОм}$ ;  $R_3 = R_4 = R_5 = 2 \text{ кОм}$ .

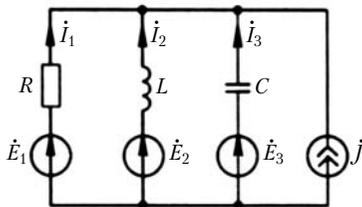


Рис. T2.7

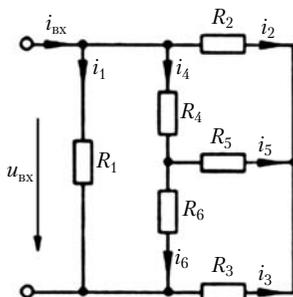


Рис. T2.8

**Решения и методические указания**

**2.24м.** Комплексное входное сопротивление цепи  $Z_{вх}$  равно сумме комплексных сопротивлений резистивного и индуктивного элементов:  $Z_{вх} = Z_R + Z_L = R + j\omega L$ , комплексная амплитуда тока  $\dot{I}_m = \dot{U}_m / Z_{вх}$  (закон Ома в комплексной форме).

**2.25м.** Векторы, отображающие комплексные амплитуды напряжений, располагают в комплексной плоскости таким образом, чтобы графически иллюстрировать выполнение баланса напряжений в контурах. Данная цепь имеет один контур, уравнение баланса напряжений для которого имеет вид  $\dot{U}_{mR} + \dot{U}_{mL} = \dot{U}_{mвх}$ . В соответствии с выбранным масштабом из начала координат строят вектор  $\dot{U}_{mR}$ , из конца которого проводят вектор  $\dot{U}_{mL}$ ; вектор  $\dot{U}_{mвх}$  направлен из начала координат к концу вектора  $\dot{U}_{mL}$ . Направление вектора  $\dot{I}_m$  совпадает с направлением вектора  $\dot{U}_{mR}$  (рис. Т2.9), так как  $\psi_{i_R} = \psi_{u_R} = -\varphi$ .

**2.26р.** Так как  $\dot{U}_{вх} = \dot{U}_R + \dot{U}_L$  и  $\psi_{u_L} - \psi_{u_R} = 90^\circ$  (см. рис. Т2.9), то  $U_{вх} = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = 5,89$  В;  $\varphi = \text{arctg}(U_L / U_R) = 32^\circ$ .

**2.27р.** Векторы  $\dot{U}_R$ ,  $\dot{U}_C$  и  $\dot{U}_{вх}$  на комплексной плоскости образуют прямоугольный треугольник, причем векторы  $\dot{U}_R$  и  $\dot{U}_C$  взаимно перпендикулярны, так как напряжение  $u_R$  и ток цепи  $i$  совпадают по фазе, а напряжение  $u_C$  отстает от тока на  $90^\circ$  (рис. Т2.10). Зная длину гипотенузы  $U_{вх}$  и одного из катетов  $U_R$ , определим длину второго катета  $U_C = \sqrt{U_{вх}^2 - U_R^2}$ . В соответствии с законом Ома для действующих значений  $R = U_R / I$ ,  $C = I / (\omega U_C)$ . Подставив последние соотношения в выражение для постоянной времени, получим  $\tau = U_R / \omega U_C$ . Используя полученное выражение для  $U_C$ , найдем  $\tau = \frac{U_R}{\omega \sqrt{U_{вх}^2 - U_R^2}} = 1$  мкс.

**2.28р.** Комплексная входная проводимость параллельной  $RL$ -цепи  $Y_{вх}$  равна сумме комплексных проводимостей индук-

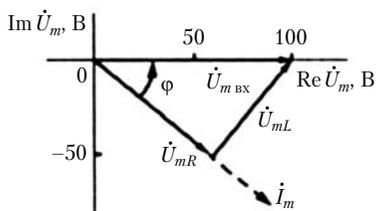


Рис. Т2.9

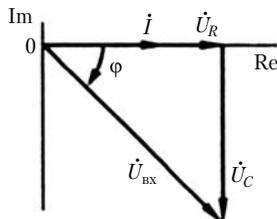


Рис. Т2.10

тивности  $Y_L$  и сопротивления  $Y_R$ :  $Y_{\text{вх}} = Y_R + Y_L = \frac{1}{R} - \frac{j}{\omega L} = (25 - j33,1) \cdot 10^{-3} = 41,5 \cdot 10^{-3} e^{-j52,9^\circ}$  См;  $Z_{\text{вх}} = 1/Y_{\text{вх}} = 24,1 e^{j52,9^\circ}$  Ом.

**2.29м.** Примите во внимание, что комплексная входная проводимость параллельной  $RC$ -цепи равна сумме комплексных проводимостей сопротивления  $Y_R = 1/R$  и емкости  $Y_C = j\omega C$ :  $Y_{\text{вх}} = 1/R + j\omega C$ .

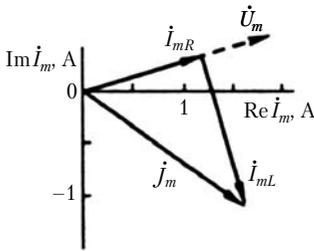


Рис. Т2.11

**2.30м.** Используя закон Ома в комплексной форме, находим комплексные амплитуды токов и напряжений элементов:  $\dot{U}_m = \dot{I}_m Z_{\text{вх}}$ ;  $\dot{I}_{mR} = \dot{U}_m/R$ ;  $\dot{I}_{mL} = \dot{U}_m/(j\omega L)$ . Комплексное входное сопротивление цепи  $Z_{\text{вх}}$  определено в задаче 2.28р. Векторная диаграмма токов приведена на рис. Т2.11.

**2.31р.** Комплексная проводимость параллельно включенных элементов  $R$  и  $C$ :  $Y_{RC} = Y_R + Y_C$ . Комплексное входное сопротивление цепи  $Z_{\text{вх}} = Z_L + Z_{RC} = Z_L + \frac{1}{Y_{RC}} = j\omega L + \frac{1}{(1/R) + j\omega C} = 12,5 + j0,221 = 12,5 e^{j1,01^\circ}$  Ом.

**2.34м.** Из решения задачи 2.31р следует, что  $x_{\text{вх}} = \text{Im} Z_{\text{вх}} = \omega L - \frac{\omega C}{(1/R^2) + (\omega C)^2}$ .

**2.36р.** Основная система уравнений электрического равновесия цепи может быть записана в виде  $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I} = 0$ ;  $\dot{U}_{R1} + \dot{U}_L - \dot{U}_{R2} - \dot{U}_C = \dot{E}$ ;  $\dot{U}_j = -\dot{U}_{R2} - \dot{U}_C$ ;  $\dot{U}_{R1} = R_1 \dot{I}_1$ ;  $\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_1$ ;  $\dot{U}_L = R_2 \dot{I}_2$ ;  $\dot{U}_C = \dot{I}_2(j\omega C)$ . Решив полученную систему уравнений при заданных значениях параметров элементов цепи, находим комплексные действующие значения токов и напряжений элементов цепи:  $\dot{I}_1 = 2,33 e^{j149,8^\circ}$  мА;  $\dot{I}_2 = 2,31 e^{j210,5^\circ}$  мА;  $\dot{U}_{R1} = 2,33 e^{j149,8^\circ}$  В;  $\dot{U}_L = 4,66 e^{j239,8^\circ}$  В;  $\dot{U}_{R2} = 6,92 e^{j210,5^\circ}$  В;  $\dot{U}_C =$

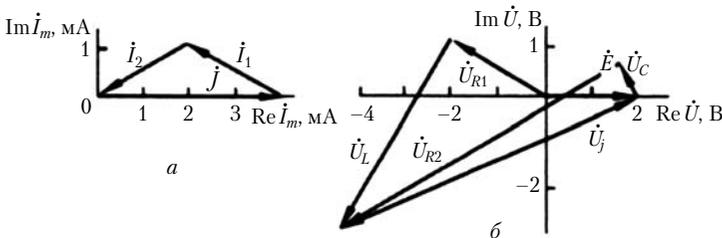


Рис. Т2.12

### 2.3. Анализ простейших линейных цепей при гармоническом воздействии 27

$= 0,769e^{j120,5^\circ}$  В;  $\dot{U}_i = 6,97e^{j24,2^\circ}$  В. Векторные диаграммы токов и напряжений приведены на рис. Т2.12, а, б соответственно.

**2.37м.** Ток  $\dot{I}_{\text{вх}}$  определяют из основной системы уравнений электрического равновесия цепи:  $\dot{I}_{\text{вх}} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ ;  $\dot{U}_{R1} + \dot{U}_{C1} = \dot{E}$ ;  $-\dot{U}_{C1} + \dot{U}_{C2} + \dot{U}_{R2} = 0$ ;  $\dot{U}_{R1} = \dot{I}_{\text{вх}}R_1$ ;  $\dot{U}_{C1} = \dot{I}_1/(j\omega C_1)$ ;  $\dot{U}_{C2} = \dot{I}_2/(j\omega C_2)$ ;  $\dot{U}_{R2} = \dot{I}_2R_1$ .

**2.38р.** Используя законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме, определим токи и напряжения всех элементов цепи:  $\dot{I}_2 = \dot{U}_{R2}/R_2 = 1$  мА;  $\dot{U}_{C2} = \dot{I}_2/(j\omega C_2) = -j88,4$  мВ;  $\dot{U}_{C1} = \dot{U}_{R2} + \dot{U}_{C2} = 1 - j0,088$  В;  $\dot{I}_1 = \dot{U}_{C1}j\omega C_1 = 0,0506 + j0,572$  мА;  $\dot{I}_{\text{вх}} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 1,05 + j0,572$  мА;  $\dot{U}_{R1} = \dot{I}_{\text{вх}}R_1 = 1,05 + j0,572$  В;  $\dot{E} = \dot{U}_{R1} + \dot{U}_{C1} = 2,05 + j0,483$  В. Векторные диаграммы токов и напряжений приведены на рис. Т2.13, а, б.

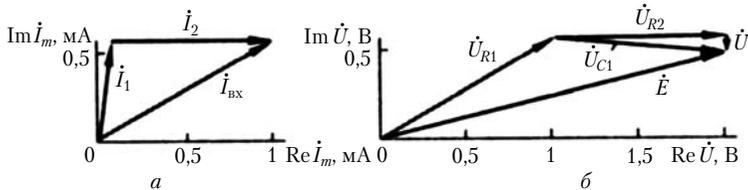


Рис. Т2.13

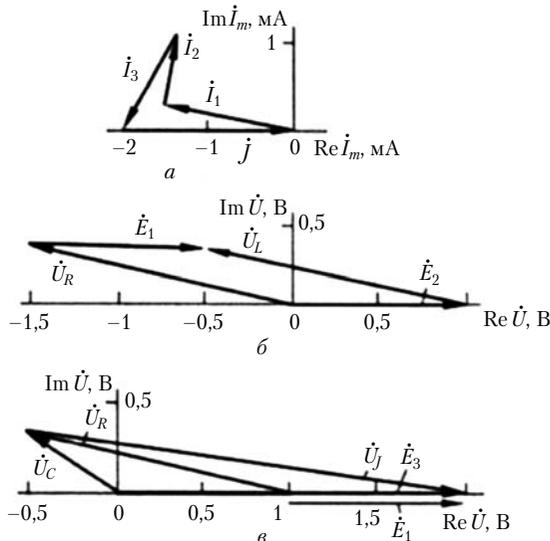


Рис. Т2.14

**2.39м.** Комплексные действующие значения всех токов и напряжений можно определить, решая основную систему уравнений электрического равновесия цепи:  $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{J} = 0$ ;  $-\dot{U}_R + \dot{U}_L = \dot{E}_2 - \dot{E}_1$ ;  $-\dot{U}_R + \dot{U}_C = \dot{E}_3 - \dot{E}_1$ ;  $\dot{U}_R + \dot{U}_j = \dot{E}_1$ ;  $\dot{U}_R = R\dot{I}_1$ ;  $\dot{U}_L = j\omega L\dot{I}_2$ ;  $\dot{U}_C = -j\dot{I}_3/(\omega C)$ . Векторные диаграммы приведены на рис. Т2.14, *a – в*.

**2.40м.** Входное сопротивление резистивной цепи или отношение  $u_{\text{вх}}/i_{\text{вх}}$  можно определить из основной системы уравнений электрического равновесия цепи:  $i_{\text{вх}} + i_1 + i_2 + i_4 = 0$ ;  $i_4 + i_5 + i_6 = 0$ ;  $i_2 + i_3 + i_5 = 0$ ;  $u_{\text{вх}} + u_{R1} = 0$ ;  $u_{R1} + u_{R4} + u_{R6} = 0$ ;  $u_{R2} - u_{R5} - u_{R4} = 0$ ;  $u_{R5} - u_{R3} - u_{R6} = 0$ ;  $u_{R1} = i_1 R_1$ ;  $u_{R2} = i_2 R_2$ ;  $u_{R3} = i_3 R_3$ ;  $u_{R4} = i_4 R_4$ ;  $u_{R5} = i_5 R_5$ ;  $u_{R6} = i_6 R_6$ .

## 2.4. Энергетические процессы в простейших цепях при гармоническом воздействии

**2.41р.** На входе двухполюсника заданы гармонические ток и напряжение:  $i = 20\cos(10^3 t - 30^\circ)$  мА;  $u = 12\cos(10^3 t + 20^\circ)$  В. Определите комплексное входное сопротивление двухполюсника  $Z_{\text{вх}}$ , активную  $P_A$ , реактивную  $P_Q$ , полную  $P_S$  и комплексную  $P_S$  мощности. Найдите мгновенную мощность, поступающую в цепь в момент времени  $t = 0$ .

**2.42м.** Предложите метод повышения коэффициента мощности цепи, рассмотренной в предыдущей задаче. Рассчитайте параметры компенсирующего элемента.

**2.43.** Рассчитайте активную, реактивную, полную и комплексную мощности, потребляемые цепью, рассмотренной в задаче 2.13м.

**2.44р.** Проверьте выполнение баланса мощностей в цепи, рассмотренной в задаче 2.36р.

**2.45.** Проверьте выполнение баланса мощностей в цепях, рассмотренных в задачах 2.38р и 2.39м.

**2.46.** Найдите оптимальное значение сопротивления нагрузки  $Z_{\text{нopt}}$ , соответствующее критерию передачи максимума активной мощности в нагрузку. Найдите активную мощность  $P_A$ , выделяющуюся в нагрузку, и КПД  $\eta$  при  $Z_{\text{н}} = Z_{\text{нopt}}$ .

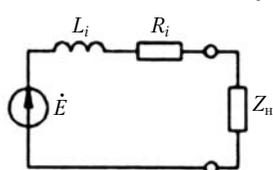


Рис. Т2.15

Схема цепи приведена на рис. Т2.15. Параметры элементов цепи:  $R_i = 1$  кОм;  $L_i = 0,5$  мГн;  $e = 0,1\cos(1,57 \cdot 10^6 t)$  В.

**2.47.** Резистивная составляющая сопротивления нагрузки  $Z_{\text{н}}$  цепи, рассмотренной в предыдущей задаче, изменилась таким образом, что

выделяющаяся в нагрузке средняя мощность уменьшилась на 10% относительно своего максимального значения. Определите КПД полученной цепи.

**2.48р.** Потребляемая нагрузкой полная мощность составляет  $20 \text{ В} \cdot \text{А}$ . Определите параметры компенсирующего элемента, если коэффициент мощности  $\cos \varphi = 0,95$ , действующее значение напряжения на нагрузке  $U = 115 \text{ В}$  при частоте  $f = 400 \text{ Гц}$ . Внутреннее сопротивление источника имеет резистивный характер.

### Решения и методические указания

**2.41р.** Комплексное входное сопротивление двухполюсника определяется как отношение комплексных амплитуд напряжения и тока:  $Z_{\text{вх}} = \dot{U}_m / \dot{I}_m = 600e^{j50^\circ} = 386 + j460 \text{ Ом}$ . Полная мощность равна произведению действующих значений напряжения и тока:  $P_S = UI = 0,12 \text{ В} \cdot \text{А}$ . Полная мощность является модулем комплексной мощности, аргументом комплексной мощности является сдвиг фаз между входными током и напряжением:  $\underline{P}_S = P_S e^{j\varphi} = 0,12e^{j50^\circ} = 0,0771 + j0,0919 \text{ В} \cdot \text{А}$ . Активная  $P_A$  и реактивная  $P_Q$  мощности представляют собой действительную и мнимую составляющие комплексной мощности:  $P_A = \text{Re } \underline{P}_S = 0,0771 \text{ Вт}$ ;  $P_Q = \text{Im } \underline{P}_S = 0,0919 \text{ вар}$ . Мгновенная мощность равна произведению мгновенных значений тока и напряжения:  $p = ui = 0,0771 + 0,12\cos(2 \cdot 10^3 t - 10^\circ) \text{ Вт}$ . В момент времени  $t = 0$  мгновенная мощность, поступающая в цепь,  $p(0) = 0,195 \text{ Вт}$ .

**2.42м.** Поскольку комплексное входное сопротивление цепи имеет резистивно-индуктивный характер, в качестве компенсирующего должен использоваться емкостный элемент. При последовательном включении компенсирующего элемента полное сопротивление емкостного элемента должно быть равно реактивной составляющей входного сопротивления цепи, а при параллельном включении полная проводимость этого элемента должна быть равна абсолютному значению реактивной составляющей входной проводимости цепи.

**2.44р.** В соответствии с условием баланса мощностей сумма комплексных мощностей источников энергии должна быть равна сумме комплексных мощностей потребителей:  $\underline{P}_{S_{\text{ист}}} = \underline{P}_{S_{\text{потр}}}$ , где  $\underline{P}_{S_{\text{ист}}} = \dot{E}_1^* \dot{I}_1 + \dot{U}_J \dot{J} = 2(-2,01 - j1,17) \cdot 10^{-3} + (6,37 + j2,85) \cdot 4 \cdot 10^{-3} = (21,5 + j9,06) \cdot 10^{-3} \text{ В} \cdot \text{А}$ ;  $\underline{P}_{S_{\text{потр}}} =$

$= I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + j[I_1^2 \omega L - I_2^2 / (\omega C)] = (21,4 + j9,07) \cdot 10^{-3} \text{ В} \cdot \text{А}$ .  
Условие баланса мощностей в пределах точности расчетов выполняется.

**2.48р.** В случае, когда внутреннее сопротивление источника носит резистивный характер, сумма реактивных мощностей, потребляемых компенсирующим элементом и нагрузкой, равна нулю. При последовательном соединении нагрузки и компенсирующего элемента должно выполняться равенство  $I^2 x + P_S \sin \varphi = 0$ , где  $x$  — реактивная составляющая комплексного сопротивления компенсирующего элемента;  $\varphi = \arccos 0,95$ . При  $\varphi > 0$  в качестве компенсирующего элемента необходимо использовать емкость  $C_{\text{пос}} = P_S / (\omega U^2 \sin \varphi) = 1,93 \text{ мкФ}$ , при  $\varphi < 0$  в качестве компенсирующего элемента используется индуктивность  $L_{\text{пос}} = -(U^2 \sin \varphi) / (\omega P_S) = 82,2 \text{ мГн}$ . При параллельном соединении нагрузки и компенсирующего элемента выполняется равенство  $U^2/x + P_S \sin \varphi = 0$ , откуда при  $\varphi > 0$   $C_{\text{пар}} = P_S \sin \varphi / (\omega U^2) = 0,188 \text{ мкФ}$ , при  $\varphi < 0$   $L_{\text{пар}} = -U^2 / (\omega P_S \sin \varphi) = 0,843 \text{ Гн}$ .

## 2.5. Преобразования электрических цепей

**2.49.** Выразите комплексные входные сопротивления цепей (рис. Т2.16, *а*, *б*) через комплексные сопротивления их элементов.

**2.50.** Решите задачу 2.37м, используя эквивалентные преобразования участков цепи.

**2.51.** Определите комплексное входное сопротивление и параметры схем замещения цепей рис. Т2.17, *а*, *б*. Параметры элементов цепи:  $C_1 = 70 \text{ пФ}$ ;  $C_2 = 30 \text{ пФ}$ ;  $C_3 = 200 \text{ пФ}$ ;  $C_4 = 100 \text{ пФ}$ ;  $C_5 = C_6 = C_7 = 300 \text{ пФ}$ ;  $L_1 = L_2 \dots = L_6 = 8 \text{ мГн}$ ;  $f = 1 \text{ МГц}$ .

**2.52м.** Рассчитайте комплексное входное сопротивление цепи рис. Т2.18 на частотах  $f_1 = 39,8 \text{ кГц}$ ;  $f_2 = 79,6 \text{ кГц}$ ;  $f_3 = 159 \text{ кГц}$ . Параметры элементов цепи:  $R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$ ;  $C_1 = C_2 = 0,5 \text{ нФ}$ ;  $L = 10 \text{ мГн}$ .

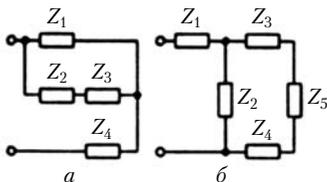


Рис. Т2.16

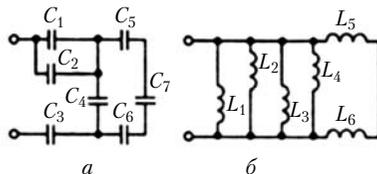


Рис. Т2.17

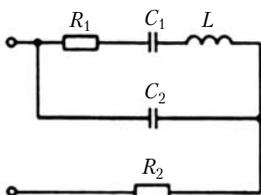


Рис. Т2.18

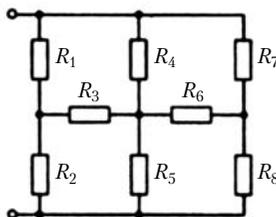


Рис. Т2.19

**2.53м.** Постройте последовательную и параллельную схемы замещения цепи, рассмотренной в задаче 2.52м. Определите параметры элементов этих схем.

**2.54м.** Определите параметры элементов последовательной схемы замещения цепи, рассмотренной в задаче 2.29м.

**2.55м.** Найдите параметры элементов последовательной схемы замещения участка цепи, состоящего из параллельно включенных резистивного ( $R = 100$  кОм) и емкостного ( $C = 1$  нФ) элементов на угловой частоте  $\omega = 10^6$  рад/с.

**2.56м.** Определите параметры элементов последовательной схемы замещения цепи, рассмотренной в задаче 2.28р.

**2.57р.** Вычислите входное сопротивление цепи, рассмотренной в задаче 2.40м, путем эквивалентных преобразований ее участков.

**2.58м.** Используя эквивалентные преобразования участков цепей, рассчитайте ток  $i_5$  цепи, рассмотренной в предыдущей задаче, при подключении к ее выводам источника ЭДС  $e = 1$  В.

**2.59м.** Определите входное сопротивление цепи рис. Т2.19. Параметры элементов цепи:  $R_1 = 714$  Ом;  $R_2 = 833$  Ом;  $R_3 = 500$  Ом;  $R_4 = 333$  Ом;  $R_5 = 250$  Ом;  $R_6 = 1$  кОм;  $R_7 = 1,43$  кОм;  $R_8 = 625$  Ом.

**2.60р.** Найдите емкости  $C_{13}$ ,  $C_{23}$ ,  $C_{12}$ , при которых схема рис. Т2.20, б эквивалентна схеме рис. Т2.20, а, если  $C_1 = C_2 = 340$  пФ,  $C_3 = 20$  пФ.

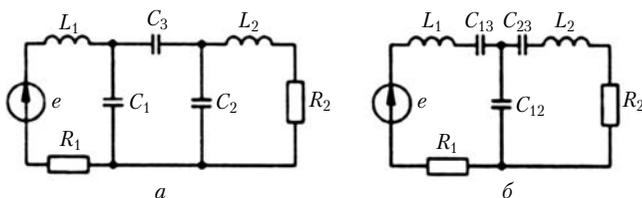


Рис. Т2.20

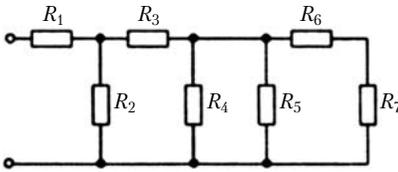


Рис. T2.21

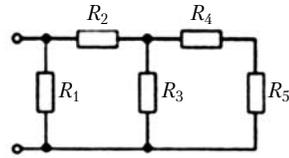


Рис. T2.22

**2.61р.** Вычислите входное сопротивление цепи (рис. T2.21). Параметры элементов цепи:  $R_1 = R_3 = R_6 = 10 \text{ кОм}$ ;  $R_2 = R_4 = R_5 = R_7 = 2 \text{ кОм}$ .

**2.62м.** Определите входную проводимость цепи рис. T2.22, если  $R_1 = R_3 = R_5 = 100 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = R_4 = 20 \text{ Ом}$ .

**2.63.** Решите задачи 2.52м и 2.62м методом пропорционального пересчета.

### Решения и методические указания

**2.52м.** Эквивалентное комплексное сопротивление ветви, составленной из элементов  $R_1$ ,  $C_1$  и  $L$ ,  $Z_{\text{эк1}} = Z_{R1} + Z_L + Z_{C1}$ . Эквивалентное комплексное сопротивление  $Z_{\text{эк2}}$  параллельно включенных ветвей  $R_1$ ,  $C_1$ ,  $L_1$  и  $C_2$   $Z_{\text{эк2}} = (Z_{\text{эк1}}Z_{C2}) / (Z_{\text{эк1}} + Z_{C2})$ . Комплексное входное сопротивление всей цепи  $Z_{\text{вх}} = Z_{R2} + Z_{\text{эк2}}$ , где  $Z_{R1} = Z_{R2} = R$ ;  $Z_L = j\omega L$ ;  $Z_{C1} = Z_{C2} = -j/(\omega C)$ .

**2.53м.** Последовательная и параллельная схемы замещения цепи, комплексное входное сопротивление которой имеет резистивно-емкостный характер, изображены на рис. T2.23 а, б. Комплексное сопротивление последовательной цепи  $Z' = R' - j/(\omega C')$ . Сравнивая его с найденным в задаче 2.52 комплексным входным сопротивлением рассматриваемой цепи  $Z = r + jx$  на частотах, соответствующих рассматриваемому случаю, определим параметры элементов последовательной схемы замещения:  $R' = r$ ;  $C' = -1/(\omega x)$ . Комплексная входная проводимость параллельной схемы замещения  $Y'' = 1/R'' + j\omega C''$ . Сравнив ее с входной проводимостью рассматриваемой цепи  $Y = 1/Z = g + jb$ , найдем пара-

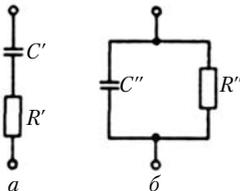


Рис. T2.23

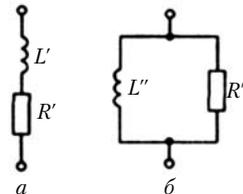


Рис. T2.24

метры элементов параллельной схемы замещения:  $R'' = 1/g$ ;  $C'' = b/\omega$ . Определим параметры элементов последовательной и параллельной схем замещения цепи рис. Т2.24,  $a$  и  $b$  на частоте  $f = f_2$ . Комплексное входное сопротивление цепи в этом случае имеет резистивно-индуктивный характер, а параметры последовательной и параллельной схем замещения (рис. Т2.24) принимают следующие значения:  $R' = r$ ,  $L' = x/\omega$ ,  $R'' = 1/g$ ;  $L'' = -1/(\omega b)$ .

**2.54м.** Комплексное входное сопротивление рассматриваемой цепи  $Z_{вх} = \frac{Z_R Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{R}{1 + (\omega RC)^2} - \frac{j\omega R^2 C}{1 + (\omega RC)^2}$ . Входное сопротивление эквивалентной цепи  $Z' = R' - j/(\omega C')$ . Приравняв попарно резистивные и реактивные составляющие сопротивлений  $Z_{вх}$  и  $Z'$ , получим  $R' = R/[1 + (\omega RC)^2]$ ;  $C' = [1 + (\omega RC)^2]/(\omega^2 R^2 C)$ .

**2.55м.** См. указания к задаче 2.54м.

**2.56м.** Параметры элементов последовательной схемы замещения определяют из равенства комплексных входных сопротивлений параллельной и последовательной цепи (см. указания к задаче 2.54м:  $R' = R/[1 + (R/\omega L)^2]$ ;  $L' = L/[1 + (\omega L/R)^2]$ ).

**2.57р.** Преобразуем звезду из резистивных элементов  $R_4, R_5, R_6$  в треугольник (рис. Т2.25,  $a$ ):  $R_{45} = R_4 + R_5 + R_4 R_5 / R_6 = 5$  кОм;  $R_{56} = R_5 + R_6 + R_5 R_6 / R_4 = 10$  кОм;  $R_{46} = R_4 + R_6 + R_4 R_6 / R_5 = 10$  кОм. Заменяем параллельно включенные элементы  $R_1$  и  $R_{46}, R_2$  и  $R_{45}, R_3$  и  $R_{56}$  соответственно элементами  $R_{эк1}, R_{эк2}, R_{эк3}$  (рис. Т2.25,  $b$ ):  $R_{эк1} = (R_1 R_{46}) / (R_1 + R_{46}) = 2,86$  кОм;  $R_{эк2} = (R_2 R_{45}) / (R_2 + R_{45}) = 2,22$  кОм;  $R_{эк3} = (R_3 R_{56}) / (R_3 + R_{56}) = 1,67$  кОм. Входное сопротивление цепи  $R_{вх} = R_{эк1} (R_{эк2} + R_{эк3}) / (R_{эк1} + R_{эк2} + R_{эк3}) = 1,65$  кОм.

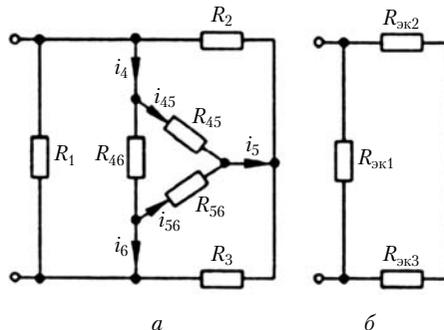


Рис. Т2.25

**2.58м.** Из решения задачи 2.57р (см. рис. Т2.25, *а*) и в соответствии с первым законом Кирхгофа ток  $i_5 = i_{45} + i_{56}$ . Токи  $i_{45}$ ,  $i_{56}$  находят, используя закон Ома после определения напряжений  $u_{R_{45}} = u_{\text{эк2}}$  и  $u_{R_{56}} = u_{\text{эк3}}$  (см. рис. Т2.25, *б*).

**2.59м.** Для «сворачивания» цепи заменим четырехлучевую звезду из элементов  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_5$ ,  $R_6$  четырехугольником  $R_{34}$ ,  $R_{46}$ ,  $R_{65}$ ,  $R_{53}$ :

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3} + \frac{R_3 R_4}{R_4} + \frac{R_3 R_4}{R_5} + \frac{R_3 R_4}{R_6};$$

$$R_{46} = \frac{R_4 R_6}{R_3} + \frac{R_4 R_6}{R_4} + \frac{R_4 R_6}{R_5} + \frac{R_4 R_6}{R_6} \text{ и т.д.}$$

**2.60р.** Для обеспечения эквивалентности преобразования треугольника емкостных элементов  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  в звезду  $C_{13}$ ,  $C_{23}$ ,  $C_{12}$  необходимо выполнение условий

$$Z_{C_{13}} = Z_{C_1} Z_{C_3} / (Z_{C_1} + Z_{C_2} + Z_{C_3});$$

$$Z_{C_{23}} = Z_{C_2} Z_{C_3} / (Z_{C_1} + Z_{C_2} + Z_{C_3});$$

$$Z_{C_{12}} = Z_{C_1} Z_{C_2} / (Z_{C_1} + Z_{C_2} + Z_{C_3}).$$

Используя эти условия, определяем  $C_{13} = C_1 + C_3 + C_1 C_3 / C_2 = 380$  пФ;  $C_{23} = C_2 + C_3 + C_2 C_3 / C_1 = 380$  пФ;  $C_{12} = C_1 + C_2 + C_1 C_2 / C_3 = 6,46$  пФ.

**2.61р.** Выражение для входного сопротивления лестничной цепи можно записать в виде непрерывной дроби:

$$R_{\text{вх}} = [R_1; R_2^{-1}; R_3; R_4^{-1}; 0; R_5^{-1}; R_6; R_7^{-1}] \text{ кОм.}$$

**2.62.** См. решение задачи 2.61р.

## 2.6. Цепи с взаимной индуктивностью

**2.64.** Определите одноименные зажимы катушек, изображенных на рис. Т2.26, *а* – *в*.

**2.65.** Для катушек, изображенных на рис. Т2.26, *в*, заданы индуктивности  $L_1 = L_2 = 1$  Гн;  $L_3 = 0,1$  Гн (нумерация катушек слева направо) и взаимные индуктивности  $M_{12} = 0,2$  Гн;  $M_{13} = 0,1$  Гн;  $M_{23} = 0,15$  Гн. Найдите максимальную и минимальную эквивалентные индуктивности цепей, образованных последовательным соединением трех катушек.

**2.66.** Рассчитайте эквивалентную индуктивность двухполюсника, образованного последовательным соединением катушек, изображенных на рис. Т2.26, *а*, для случая, когда зажим 2 соединен с зажимом 4. Параметры элементов цепи:

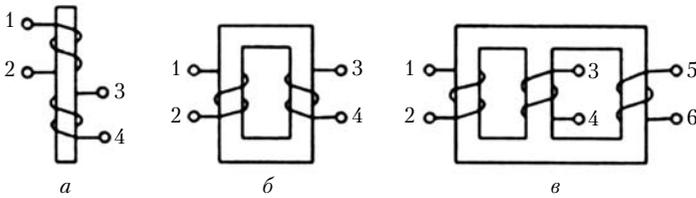


Рис. Т2.26

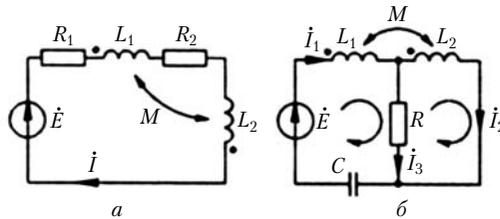


Рис. Т2.27

индуктивности катушек  $L_1 = 16$  мГн;  $L_2 = 4$  мГн, коэффициент связи между катушками  $k_M = 0,8$ .

**2.67р.** Составьте основные системы уравнений электрического равновесия цепей, схемы которых приведены на рис. Т2.27, а, б.

**2.68р.** На рис. Т2.28 приведена схема цепи со следующими параметрами элементов:  $R = 5$  кОм;  $C = 0,5$  нФ;  $L_1 = 3$  мГн;  $L_2 = 5$  мГн;  $M = 2$  мГн;  $\dot{E} = 10$  В;  $\omega = 10^6$  рад/с. Определите комплексное входное сопротивление цепи относительно зажимов 1 – 1' и мгновенное значение тока. Проверьте выполнение баланса мощностей.

**2.69.** Составьте уравнения электрического равновесия для определения токов ветвей цепи рис. Т2.29.

**2.70р.** Найдите выражение для комплексного входного сопротивления цепи рис. Т2.30.

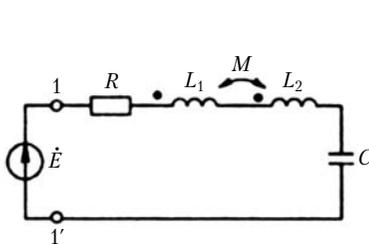


Рис. Т2.28

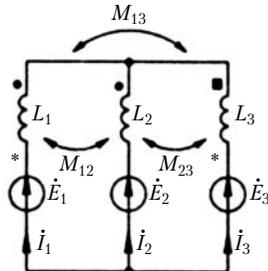


Рис. Т2.29

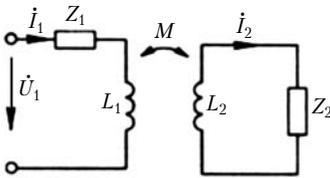


Рис. Т2.30

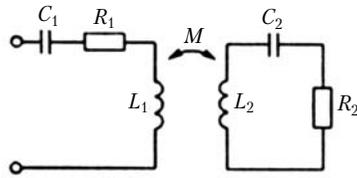


Рис. Т2.31

**2.71.** Определите комплексное входное сопротивление цепи рис. Т2.31, если  $C_1 = C_2 = 1$  нФ;  $L_1 = L_2 = 1$  мГн;  $R_1 = R_2 = 20$  Ом;  $M = 48$  мкГн;  $\omega_1 = 10^6$  рад/с;  $\omega_2 = 1,02 \cdot 10^6$  рад/с.

**2.72.** Линейный трансформатор, у которого  $L_1 = L_2 = L = 4,2$  мГн;  $R_1 = R_2 = R = 1,2$  Ом;  $M = 1,8$  мГн, нагружен на элемент  $C = 3,2$  мкФ. Найдите параметры последовательной схемы замещения нагруженного трансформатора относительно входных зажимов на частоте  $f = 1$  кГц.

**2.73м.** Полное входное сопротивление одной из двух одинаковых индуктивно связанных катушек при разомкнутой другой катушке на угловой частоте  $\omega = 10^6$  рад/с,  $z_{\text{вх к}} = 10$  кОм, а при короткозамкнутой другой катушке —  $z_{\text{вх к}} = 9,9$  кОм. Определите индуктивность катушек, взаимную индуктивность и коэффициент связи между ними. Потерями в катушках можно пренебречь.

**2.74.** Последовательная схема замещения входной цепи линейного трансформатора с одинаковыми первичной и вторичной обмотками при разомкнутой вторичной обмотке имеет параметры  $L_{\text{эк1}} = 4,2$  мГн;  $R_{\text{эк1}} = 1,2$  Ом. Найдите сопротивление  $R_{\text{эк2}}$  такой же схемы замещения при коротком замыкании вторичной обмотки, если на той же частоте  $L_{\text{эк2}} = 3,43$  мГн.

**2.75.** Определите параметры последовательной схемы замещения относительно входных и выходных зажимов линейного трансформатора при поочередном коротком замыкании вторичной и первичной обмоток. Параметры трансформатора:  $L_1 = 7,58$  мкГн;  $L_2 = 75,8$  мкГн;  $M = 21,6$  мкГн;  $R_1 = 0,2$  Ом;  $R_2 = 0,7$  Ом;  $f = 105$  кГц.

**2.76.** Две последовательные  $RL$ -цепи с параметрами  $R_1 = 1$  Ом;  $L_1 = 1$  мГн;  $R_2 = 2$  Ом;  $L_2 = 2$  мГн включены последовательно. Рассчитайте параметры последовательной схемы замещения цепи, если коэффициент связи между индуктивными элементами  $k_{M_1} = 0,1$ ;  $k_{M_2} = 0,9$ .

**2.77м.** Решите предыдущую задачу для случая параллельного соединения последовательных  $RL$ -цепей. Угловая частота  $\omega = 10^5$  рад/с.

**2.78р.** Определите входное сопротивление идеального трансформатора, нагруженного на элемент  $Z_n = 20e^{j60^\circ}$  Ом. Число витков первичной обмотки  $N_1 = 400$ , вторичной обмотки  $N_2 = 40$ . Найдите комплексные действующие значения тока  $\dot{I}_1$  и напряжения  $\dot{U}_1$  на входных зажимах трансформатора, если ток вторичной обмотки  $\dot{I}_2 = 0,12e^{j30^\circ}$  А.

**2.79м.** Найдите схему соединений, компенсирующую емкость и коэффициент трансформации идеального согласующего трансформатора, необходимые для получения максимума средней мощности в нагрузке  $R_n = 0,5$  кОм, если источник гармонического напряжения частотой  $f = 1$  кГц имеет внутреннее комплексное сопротивление  $Z_i = 320 + j100$  Ом.

### Решения и методические указания

**2.67р.** Для рис. Т2.27, а через оба индуктивных элемента протекает один и тот же ток, поэтому напряжения на сопротивлениях связи одинаковы:  $\dot{U}_{R_1} + \dot{U}_{L_1} + \dot{U}_{R_2} + \dot{U}_{L_2} = \dot{E}$ ;  $\dot{U}_{R_1} = R_1\dot{I}$ ;  $\dot{U}_{L_1} = j\omega L_1\dot{I} - j\omega M\dot{I}$ ;  $\dot{U}_{R_2} = R_2\dot{I}$ ;  $\dot{U}_{L_2} = j\omega L_2\dot{I} - j\omega M\dot{I}$ . Для рис. Т2.27, б токи, протекающие через индуктивности, разные и напряжения на элементах связи в разных контурах тоже различны:  $\dot{U}_{L_1} + \dot{U}_R + \dot{U}_C = \dot{E}$ ;  $\dot{U}_{L_2} - \dot{U}_R = 0$ ;  $\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0$ ;  $\dot{U}_{L_1} = j\omega L_1\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2$ ;  $\dot{U}_R = R\dot{I}_3$ ;  $\dot{U}_C = -j\dot{I}_1/(\omega C)$ ;  $\dot{U}_{L_2} = j\omega L_2\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1$ .

**2.68р.** Комплексное входное сопротивление цепи  $Z_{вх} = R + j[\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M - 1/(\omega C)] = 5 + j10$  кОм. По закону Ома в комплексной форме, комплексное действующее значение тока  $\dot{I} = \dot{E}/Z_{вх} = (0,4 - j0,8) \cdot 10^{-3} = 0,894 \cdot 10^{-3} e^{-j63,4^\circ}$  А, чему соответствует мгновенное значение тока  $i = 1,26\cos(10^6t - 63,4^\circ)$  мА. Комплексная мощность, отдаваемая источником ЭДС,  $\underline{P}_{\text{ист}} = \dot{E}\dot{I}^* = (4 + j8)$  В·А. Сумма комплексных мощностей всех потребителей  $\underline{P}_{\text{потр}} = \dot{I}^2 R + + jI^2[\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M - 1/(\omega C)] = (4 + j8) \cdot 10^{-3}$  В·А. Условие баланса мощностей выполняется.

**2.70р.** Используя основную систему уравнений электрического равновесия в комплексной форме, получим уравнения для определения токов в виде  $Z_1\dot{I}_1 + j\omega L_1\dot{I}_1 \pm j\omega M\dot{I}_2 = \dot{U}_1$ ;  $Z_2\dot{I}_2 + j\omega L_2\dot{I}_2 - j\omega M\dot{I}_1 = 0$ . Исключив из полученной системы уравнений ток  $\dot{I}_2$ , найдем выражение для входного сопротивления цепи:  $Z_{вх} = \dot{U}_1/\dot{I}_1 = Z_1 + j\omega L_1 + (\omega M)^2/(Z_2 + j\omega L_2)$ .

**2.73м.** Индуктивность катушек и взаимная индуктивность могут быть определены с помощью выражений, полученных

при решении задачи 2.70р:  $z_{\text{вх}x} = \omega L_1$ ;  $Z_{\text{вх}k} = \omega(L_1 - M^2/L_2)$ . Коэффициент связи  $k = M/L$ .

**2.77м.** Комплексное входное сопротивление цепи (см. решение задачи 2.70р)  $Z_{\text{вх}} = \frac{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_1) + (\omega M)^2}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2) \mp 2j\omega M}$ . Верхний знак («минус») соответствует согласному включению, нижний знак («плюс») — встречному.

**2.78р.** Коэффициент трансформации  $n = N_2/N_1 = 0,1$ . Входное сопротивление идеального трансформатора отличается от сопротивления нагрузки в  $n^2$  раз:  $Z_{\text{вх}} = \frac{Z_{\text{н}}}{n^2} = 2e^{j60^\circ}$  кОм. Напряжение на вторичной обмотке трансформатора  $\dot{U}_2 = Z_{\text{н}} \dot{I}_2 = 2,4e^{j90^\circ}$  В. В результате найдем ток и напряжение на зажимах первичной обмотки:  $\dot{I}_1 = n\dot{I}_2 = 0,012e^{j30^\circ}$  А;  $\dot{U}_1 = \frac{\dot{U}_2}{n} = 24e^{j90^\circ}$  В.

**2.79м.** Возможные варианты соединения идеального трансформатора, компенсирующей емкости и нагрузки представлены на рис. Т2.32, *a — z*. Условие передачи максимума средней мощности в нагрузку имеет вид  $Z_i = Z_{\text{вх}}^*$  или  $Y_i = Y_{\text{вх}}^*$ . Для рис. Т2.32, *a*  $Y_{\text{вх}} = n^2[(1/R_{\text{н}}) + j\omega C]$ , для рис. Т2.32, *б*  $Y_{\text{вх}} = [(n^2/R_{\text{н}}) + j\omega C]$ ; для рис. Т2.32, *в*  $Z_{\text{вх}} = \frac{1}{n^2} \left[ R_{\text{н}} - j \frac{1}{\omega C} \right]$ ; для рис. Т2.32, *z*  $Z_{\text{вх}} = \frac{R_{\text{н}}}{n^2} - j \frac{1}{\omega C}$ .

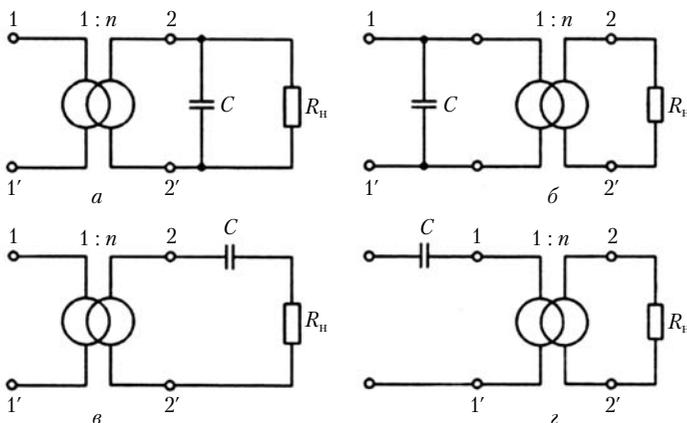


Рис. Т2.32

## Глава 3

# ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

### 3.1. Комплексные частотные характеристики линейных электрических цепей

**3.1р.** Найдите аналитические выражения и постройте (качественно) графики частотных зависимостей модуля, аргумента, вещественной и мнимой составляющих комплексного входного сопротивления цепи, состоящей из параллельно соединенных сопротивления и емкости.

**3.2.** Найдите аналитические выражения и изобразите (качественно) АЧХ и ФЧХ коэффициента передачи по напряжению в режиме холостого хода на выходе цепей рис. ТЗ.1, а, б, где  $R_1 = R_2 = R$ ;  $C_1 = C_2 = C$ .

**3.3м.** Определите модуль и аргумент комплексной входной проводимости параллельно соединенных сопротивления и индуктивности. Постройте годограф входной проводимости при  $R = 2 \text{ Ом}$ .

**3.4р.** Постройте АЧХ и ФЧХ коэффициента передачи по напряжению в режиме холостого хода на выходе делителя напряжения (рис. ТЗ.2), если: а)  $R = 0,2\sqrt{L/C}$ ; б)  $R = \sqrt{L/C}$ ; в)  $R = 5\sqrt{L/C}$ .

**3.5р.** Определите значение емкости  $C_1$ , при котором АЧХ коэффициента передачи по напряжению цепи рис. ТЗ.3 имеет вид  $K(\omega) = \text{const}$ . Какой вид будет иметь при этом ФЧХ? Параметры элементов цепи:  $R_1 = 1 \text{ МОм}$ ;  $C_2 = 1 \text{ нФ}$ ;  $R_2 = 1 \text{ кОм}$ .

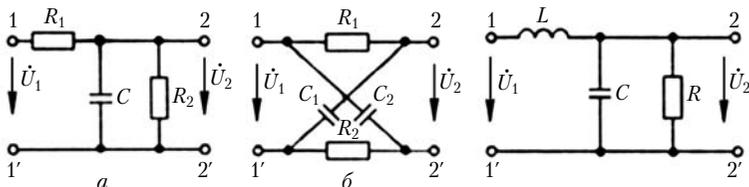


Рис. ТЗ.1

Рис. ТЗ.2

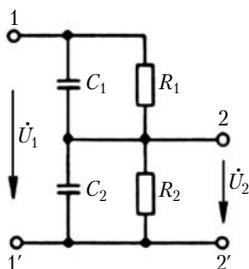


Рис. Т3.3

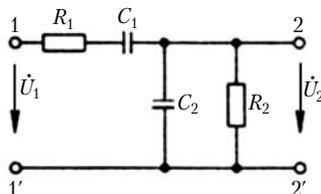


Рис. Т3.4

**3.6.** Найдите модуль и аргумент КЧХ цепи, рассмотренной в задаче 3.1р, если воздействие и отклик — соответственно входной ток  $\dot{I}_{\text{вх}}$  и ток сопротивления  $\dot{I}_R$ .

**3.7м.** Для цепи (рис. Т3.4) определите угловую частоту  $\omega_0$ , на которой АЧХ коэффициента передачи по напряжению имеет максимум. Рассчитайте сдвиг фаз между входным и выходным напряжением на этой частоте, если  $R_1 = R_2 = R = 1 \text{ кОм}$ ;  $C_1 = C_2 = C = 1 \text{ нФ}$ .

**3.8м.** Определите угловые частоты, на которых сдвиг фаз между входными и выходными напряжениями в цепях (рис. Т3.5, а, б) составляет  $-\pi/2$  и  $-\pi$ . Найдите модуль коэффициента передачи по напряжению на этих частотах, если:  $R_1 = R_2 = R_3 = R = 1 \text{ кОм}$ ;  $C_1 = C_2 = C_3 = C = 1 \text{ нФ}$ .

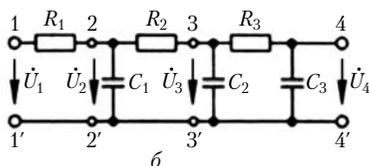
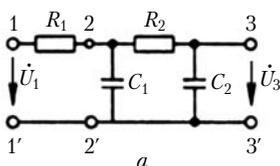


Рис. Т3.5

**3.9м.** При каком соотношении между параметрами элементов цепи (рис. Т3.6) ее входное сопротивление не зависит от частоты? Примите  $R_1 = R_2 = R$ .

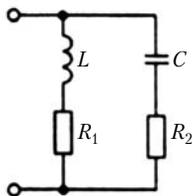


Рис. Т3.6

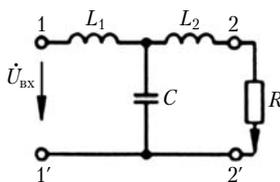


Рис. Т3.7

**3.10м.** Найдите частоту, на которой сдвиг фаз между током сопротивления  $\dot{I}_R$  и напряжением на входе цепи  $\dot{U}_{\text{вх}}$  составляет  $180^\circ$ . Схема цепи приведена на рис. ТЗ.7, где  $L_1 = L_2 = L$ .

**3.11.** Определите АЧХ передаточных сопротивлений и проводимости цепи (см. рис. ТЗ.1, *a*), если воздействием является ток или напряжение на входе цепи, а реакцией — напряжение или ток сопротивления  $R_2$ .

### Решения и методические указания

**3.1р.** Комплексное входное сопротивление параллельной  $RC$ -цепи можно представить в виде  $Z = R/(1 + j\omega RC)$ . Используя это выражение, находим зависимости от частоты модуля  $z(\omega) = R/\sqrt{1 + (\omega RC)^2}$ , аргумента  $\varphi(\omega) = -\arctg(\omega RC)$ , вещественной  $r(\omega) = R/[1 + (\omega RC)^2]$  и мнимой  $x(\omega) = -\omega R^2 C/[1 + (\omega RC)^2]$  составляющих комплексного входного сопротивления.

Построение графиков упрощается при введении нормированных величин: частоты  $\bar{\omega} = \omega RC$ , полного сопротивления  $\bar{z}(\bar{\omega}) = z(\bar{\omega})/R = 1/\sqrt{1 + \bar{\omega}^2}$ , вещественной  $\bar{r}(\bar{\omega}) = r(\bar{\omega})/R = 1/(1 + \bar{\omega}^2)$  и мнимой  $\bar{x}(\bar{\omega}) = x(\bar{\omega})/R = -\bar{\omega}/(1 + \bar{\omega}^2)$  составляющих КЧХ. Графики нормированных частотных зависимостей приведены на рис. ТЗ.8, *a* — *з*. Слева и справа построены одни и те же графики в разных масштабах: графики *a*, *в*, *д*, *ж* построены в линейном масштабе, график *б* построен в полулогарифмическом масштабе, графики *г*, *е*, *з* построены в логарифмическом масштабе. Логарифмический масштаб в данном простейшем примере не имеет особых преимуществ по сравнению с линейным, но широко используется в случае большой вариации (до  $10^6$  раз) функций и (или) аргумента, когда линейный масштаб неприменим.

**3.3м.** Годограф входной проводимости приведен на рис. ТЗ.9. Вид годографа не зависит от значения индуктивности  $L$ , но при изменении значения  $L$  одним и тем же точкам годографа, кроме точки, лежащей на действительной оси, будут соответствовать различные значения частоты.

**3.4р.** Коэффициент передачи по напряжению рассматриваемой цепи:  $K(j\omega) = Z_2/(Z_2 + Z_1)$ , где  $Z_1 = j\omega L$ ;  $Z_2 = R/(1 + j\omega RC)$ . Комплексная частотная характеристика  $K(j\omega) = 1/(1 - \omega^2 LC + j\omega L/R)$ . Зависимость модуля КЧХ от частоты представляет собой АЧХ

$$K(\omega) = 1/\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega L/R)^2},$$

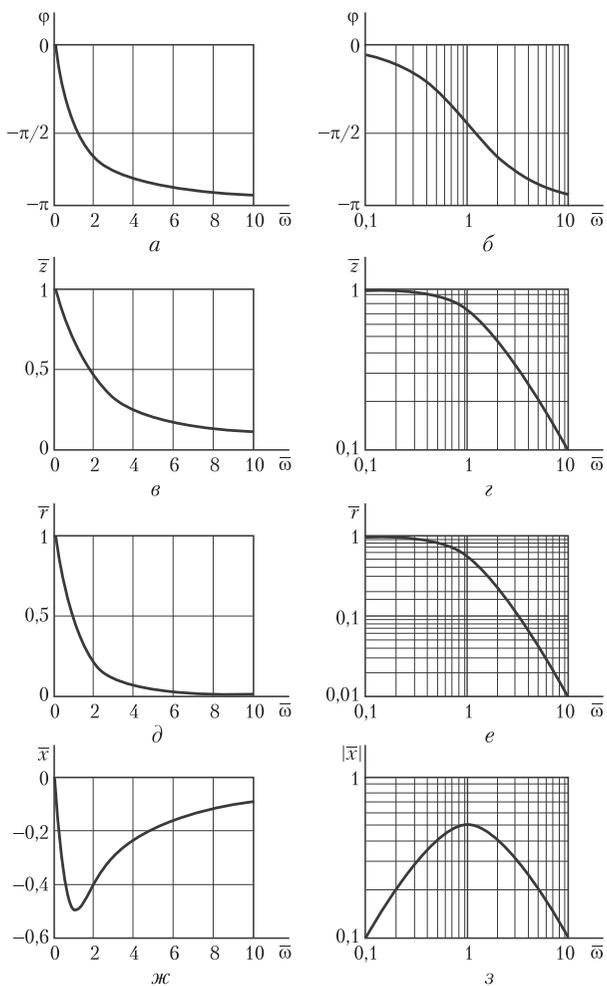


Рис. Т3.8

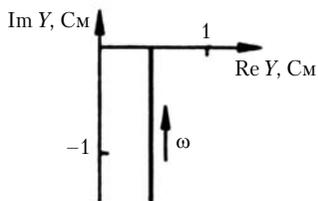


Рис. Т3.9

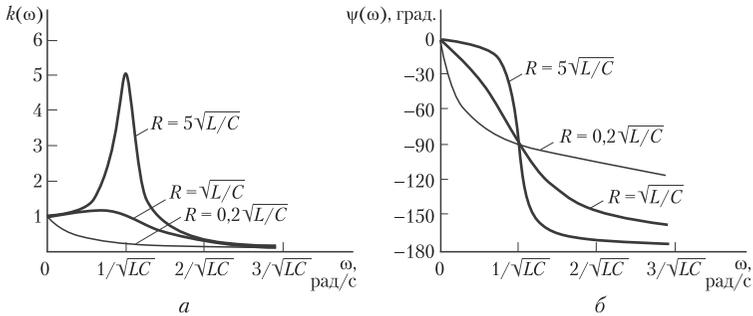


Рис. ТЗ.10

а аргумента – ФЧХ

$$\psi(\omega) = \begin{cases} -\operatorname{arctg}[(\omega L/R)/(1 - \omega^2 LC)] & \text{при } \omega \leq 1/\sqrt{LC}, \\ -\pi + \operatorname{arctg}[(\omega L/R)/(\omega^2 LC - 1)] & \text{при } \omega > 1/\sqrt{LC}. \end{cases}$$

Частотные характеристики цепи показаны на рис. ТЗ.10, а, б.

**3.5р.** Комплексный коэффициент передачи цепи по напряжению

$$K(j\omega) = \frac{R_2(1 + j\omega R_1 C_1)}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 (C_1 + C_2)}.$$

Преобразуем это выражение к более удобному для анализа виду

$$K(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + j\omega R_1 C_1}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (C_1 + C_2)}.$$

Модуль коэффициента передачи цепи не будет зависеть от частоты  $K(\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \operatorname{const}$  в случае, если  $R_1 C_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (C_1 + C_2)$ , откуда  $C_1 = \frac{R_2 C_2}{R_1} = 1$  пФ. ФЧХ цепи  $\psi(\omega) = 0$ .

**3.7м.** АЧХ и ФЧХ цепи определяются следующими выражениями:

$$K(\omega) = 1/\sqrt{9 + (\omega RC - 1/\omega RC)^2};$$

$$\psi(\omega) = -\operatorname{arctg}[(\omega RC - 1/\omega RC)/3].$$

Из условия  $dK(\omega)/d\omega = 0$  следует, что  $\omega_0 = 1/(RC)$ .

**3.8м.** Напряжения на выходе цепей можно найти методом пропорционального пересчета. Для цепи рис. ТЗ.5, а

$\dot{U}_3 = K_a(j\omega)\dot{U}_1$ , для цепи (см. рис. ТЗ.5, б)  $\dot{U}_4 = K_6(j\omega)\dot{U}_1$ , где  $K_a(j\omega) = 1/[1 - (\omega RC)^2 + j3\omega RC]$ ,  $K_6(j\omega) = 1/(1 - 5(\omega RC)^2 + j[6\omega RC - (\omega RC)^3])$ . Частоту, на которой сдвиг фаз между входными и выходными напряжениями составляет  $-\pi/2$ , определяют из условий  $\text{Re}[K(j\omega)] = 0$ ,  $\text{Im}[K(j\omega)] < 0$ . При  $\text{Im}[K(j\omega)] = 0$ ,  $\text{Re}[K(j\omega)] < 0$  сдвиг фаз составляет  $-\pi$ .

**3.9м.** Эта задача решается аналогично задаче 3.5р, причем выражение для комплексного входного сопротивления цепи удобно преобразовать к следующему виду:

$$Z_{\text{вх}} = R \frac{\left( R + \frac{L}{RC} \right) + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{2R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}.$$

**3.10м.** На искомой частоте  $\text{Re}[Y_{21}(j\omega)] < 0$  и  $\text{Im}[Y_{21}(j\omega)] = 0$ , где  $Y_{21}(j\omega)$  — комплексная передаточная проводимость цепи.

## 3.2. Последовательный колебательный контур

**3.12.** Определите резонансную частоту  $f_0$  характеристического сопротивления  $\rho$ , добротность  $Q$  и полосу пропускания  $\Pi_f$  последовательного колебательного контура. Параметры элементов контура:  $L = 180$  мкГн;  $C = 240$  пФ;  $R = 8,2$  Ом.

**3.13.** Как изменятся резонансная частота, добротность и полоса пропускания последовательного колебательного контура при увеличении в 2 раза: а) сопротивления потерь; б) индуктивности; в) емкости?

**3.14.** Последовательный колебательный контур имеет резонансную частоту  $f_0 = 6,5$  МГц, индуктивность  $L = 12,4$  мкГн. Определите емкость и сопротивление потерь контура, если задана его полоса пропускания  $\Pi_f = 150$  кГц.

**3.15р.** Заданы резонансная частота последовательного колебательного контура  $f_0 = 2$  МГц, ширина полосы пропускания  $\Pi_f = 16$  кГц и сопротивление потерь  $R = 12$  Ом. Рассчитайте параметры реактивных элементов контура.

**3.16м.** К последовательному колебательному контуру с параметрами элементов  $L = 2$  мГн;  $C = 1,5$  нФ;  $R = 32$  Ом подключен источник гармонической ЭДС. Определите абсолютную  $\Delta_f$ , относительную  $\delta$  и обобщенную  $\xi$  расстройки контура на частотах  $f_1 = 100$  кГц;  $f_2 = 92$  кГц;  $f_3 = 88$  кГц. Найдите модуль и аргумент комплексного входного сопротивления контура на этих частотах.

**3.17м.** В последовательном колебательном контуре известны параметры реактивных элементов:  $L = 1,02$  мГн;  $C = 970$  пФ. Найдите граничные частоты полосы пропускания для двух значений сопротивления потерь:  $R_1 = 10$  Ом;  $R_2 = 350$  Ом.

**3.18.** Последовательный колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и конденсатора с параметрами  $L = 220$  мкГн;  $Q_L(f_0) = 125$ ;  $C = 535$  пФ;  $Q_C(f_0) = 3000$ , подключен к источнику энергии с внутренним сопротивлением  $R_i = 17$  Ом. Определите резонансную частоту  $f_0$  и полосу пропускания  $\Pi_f$  цепи.

**3.19.** К последовательному колебательному контуру, составленному из элементов  $R = 4$  Ом;  $L = 0,2$  мГн;  $C = 510$  пФ, подключен источник энергии. Рассчитайте его внутреннее сопротивление, если эквивалентная добротность контура  $Q_{\text{эк}} = 62,6$ .

**3.20р.** К последовательному колебательному контуру с добротностью  $Q = 84$  и сопротивлением потерь  $R = 5,2$  Ом через идеальный трансформатор подключен источник с внутренним сопротивлением  $R_i = 1$  кОм. Определите коэффициент трансформации, при котором эквивалентная добротность контура  $Q_{\text{эк}} = 42$ , и напряжение на емкости контура на резонансной частоте, если действующее значение тока источника в режиме короткого замыкания  $I_k = 1$  мА.

**3.21м.** Найдите полное сопротивление последовательного колебательного контура при относительных расстройках  $\delta_1 = \pm 0,01$ ;  $\delta_2 = \pm 0,08$ . Параметры элементов контура:  $R = 25$  Ом;  $C = 640$  пФ;  $L = 0,16$  мГн.

**3.22.** Определите параметры элементов последовательной схемы замещения цепи, рассмотренной в задаче 3.21м, при абсолютной расстройке  $\Delta_f = \pm 15$  кГц.

**3.23.** Резонансная частота последовательного колебательного контура, состоящего из конденсатора емкостью  $C = 20$  пФ и катушки индуктивности добротностью  $Q_L = 72$ ,  $f_0 = 10,5$  МГц. Вычислите индуктивность катушки и добротность конденсатора, если  $\Pi_f = 150$  кГц.

**3.24м.** Найдите диапазон частот, в котором амплитуда тока  $I_m$  последовательного колебательного контура уменьшается не более чем в  $n$  раз относительно своего максимального значения. Параметры контура  $Q = 20$ ;  $L = 0,8$  мГн;  $C = 1,2$  нФ;  $n_1 = \sqrt{2}$ ;  $n_2 = 2$ ;  $n_3 = 10$ ;  $n_4 = 100$ .

**3.25м.** Определите диапазон частот, в котором активная мощность, потребляемая контуром, рассмотренным в пре-

дыдущей задаче, уменьшается не более чем в  $n$  раз относительно своего максимального значения.

**3.26р.** Амплитуды напряжения на индуктивной катушке и конденсаторе последовательного колебательного контура на резонансной частоте  $\omega_0$  составляют  $U_{mL} = U_{mC} = 12$  В, а на частоте  $\omega - U_{mL} = 8$  В;  $U_{mC} = 8,8$  В. Найдите аргумент комплексного входного сопротивления контура на частоте  $\omega$ , если амплитуда напряжения на входе контура не зависит от частоты:  $U_m = 0,6$  В.

**3.27р.** Рассчитайте ширину полосы пропускания цепи (рис. Т3.11). Параметры элементов цепи:  $L = 1$  мГн;  $C = 1$  нФ;  $R = 10$  Ом;  $R_i = 5$  Ом;  $R_H = 0,1$  МОм.

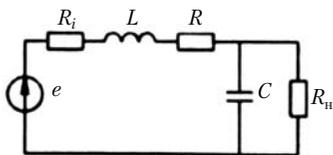


Рис. Т3.11

Определите значения параметров реактивных элементов колебательного контура (рис. Т3.12), при которых в нагрузке  $R_H$  на резонансной частоте выделяется максимальная средняя мощность. Параметры цепи:  $R_i = 50$  Ом;  $R_H = 2$  кОм;  $f_0 = 28$  МГц;  $\Pi_f = 2,5$  МГц.

**3.29м.** Колебательный контур (рис. Т3.13) подключен к источнику энергии с внутренним сопротивлением  $R_i = 50$  Ом. Вычислите значения емкостей  $C_1$  и  $C_2$ , если  $f_0 = 2$  МГц;  $Q_{\text{эк}} = 18$ ;  $L = 120$  мкГн;  $Q_L(f_0) = 86$ ;  $Q_C \gg Q_L$ ,  $R_H = 120$  кОм.

**3.30м.** В последовательный колебательный контур с элементами  $R = 10$  Ом;  $L = 2$  мГн;  $C = 2$  нФ включен некоторый двухполюсник. Найдите эквивалентную добротность полученного контура при следующих значениях дифференциального сопротивления двухполюсника:  $R_{i1} = 10$  Ом;  $R_{i2} = 0$ ;  $R_{i3} = -5$  Ом;  $R_{i4} = -15$  Ом.

**3.31м.** Во сколько раз увеличится полоса пропускания последовательного колебательного контура при изменении его емкости от 500 до 10 пФ, если известны сопротивление нагрузки  $R_H = 500$  кОм и полоса пропускания ненагруженного контура  $\Pi_f = 30,6$  кГц?

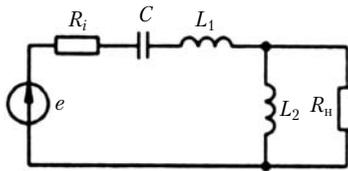


Рис. Т3.12

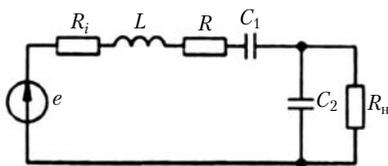


Рис. Т3.13

## Решения и методические указания

**3.15р.** Решая систему уравнений  $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ ;  $\Pi_f = f_0 R/\sqrt{L/C}$ , найдем индуктивность и емкость контура:  $L = R/(2\pi\Pi_f) = 119$  мкГн;  $C = \Pi_f/(2\pi f_0^2 R) = 53$  пФ.

**3.16м.** Обобщенная расстройка контура  $\xi = Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega) = Q[(f/f_0) - (f_0/f)]$ . В области малых расстроек ( $\delta \ll 0,1$ ) можно использовать приближенное соотношение  $\xi \approx 2Q$ .

**3.17м.** У контуров с высокой добротностью ( $Q \geq 5$ ) АЧХ в полосе пропускания практически симметрична относительно резонансной частоты. В этом случае граничные частоты можно определять с помощью приближенного соотношения  $f_{гр} \approx f_0 \pm 0,5\Pi_f$ . При низкой добротности контура необходимо пользоваться точным выражением

$$f_{гр} = f_0[\sqrt{1 + 1/(2Q)^2} \pm 1/(2Q)].$$

**3.20р.** Эквивалентная добротность контура  $Q_{эк} = Q/(1 + R'_i/R)$ , где  $R'_i$  — входное сопротивление вторичной обмотки идеального трансформатора при подключении источника к первичной обмотке. Внутреннее сопротивление источника  $R_i$  и входное сопротивление вторичной обмотки трансформатора  $R'_i$  связаны соотношением  $R'_i = n^2 R_i$ . Коэффициент трансформации  $n = \sqrt{R'_i/R_i} = \sqrt{R(Q/Q_{эк} - 1)/R_i} = 0,0721$ . На резонансной частоте входное сопротивление нагруженного на контур трансформатора  $R_{вх\tau} = R/n^2$ ; напряжение на его входе  $U_1 = I_k R_i R_{вх\tau}/(R_i + R_{вх\tau})$ , на выходе  $U_2 = nU_1$ , на емкости контура  $U_C = QU_2$ . Искомое напряжение  $U_C = 3,03$  В.

**3.21м.** Полное сопротивление контура  $z = R\sqrt{1 + \xi^2}$ . Обобщенная расстройка  $\xi$  связана с относительной  $\delta$  выражением  $\xi = \delta Q(\delta + 2)/(\delta + 1)$ . При  $\delta \ll 0,1$   $\xi \approx 2\delta Q$ .

**3.24м.** Обобщенная расстройка  $\xi_{гр}$ , соответствующая указанному уровню тока  $I_{m0}/n$ , определяется из зависимости тока контура от частоты:  $I_m|_{\xi=\xi_{гр}} = I_{m0}/\sqrt{1 + \xi_{гр}^2} = I_{m0}/n$ . Граничная частота может быть найдена из соотношения  $\xi_{гр} = Q[(f_{гр}/f_0) - (f_0/f_{гр})]$ .

**3.25м.** Решение данной задачи отличается от решения предыдущей только тем, что искомый диапазон частот определяют из зависимости квадрата тока от частоты, так как  $P_A = I^2 R$ ;  $R = \text{const}$ .

**3.26р.** Амплитуды напряжения на элементах контура можно определить, используя следующие соотношения:

$U_{mC} = Q \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} U_{mвх}$ ;  $U_{mL} = Q \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} U_{mвх}$ . Отношение этих величин позволяет найти нормированную частоту:  $\sqrt{U_{mL}/U_{mC}} = \omega/\omega_0$ . Добротность контура равна модулю коэффициента передачи контура на резонансной частоте:  $Q = U_{mL}(\omega_0)/U_{mвх} = U_{mC}(\omega_0)/U_{mвх}$ . Аргумент комплексного входного сопротивления

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{U_{mL}(\omega_0)}{U_{mвх}} (\sqrt{U_{mL}/U_{mC}} - \sqrt{U_{mC}/U_{mL}}) = -62,3^\circ.$$

**3.27р.** Ширина полосы пропускания последовательного колебательного контура при подключенных источнике и нагрузке  $\Pi_f = f_0/Q_{эк}$ , где  $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC}) = 159$  кГц – резонансная частота контура;  $Q_{эк} = \rho/(R_i + R + R'_н)$  – эквивалентная добротность контура;  $\rho = \sqrt{L/C} = 1$  кОм – характеристическое сопротивление контура. Для того чтобы учесть влияние сопротивления нагрузки на ширину полосы пропускания контура, заменим на резонансной частоте  $f_0$  участок цепи с параллельно включенными элементами  $C$  и  $R'_н$  участком цепи с последовательно включенными элементами  $C'$  и  $R'_н$  (см. задачу 2.54м):

$$R'_н = R_н/[1 + (2\pi f_0 R_н C)^2] \approx 1/[(2\pi f_0 C)^2 R_н] = 10 \text{ Ом};$$

$$C' = C [1 + (2\pi f_0 R_н C)^2]/(2\pi f_0 R_н C)^2 = 1 \text{ нФ}.$$

Используя полученное значение  $R'_н$ , определим эквивалентную добротность контура и ширину полосы пропускания:  $Q_{эк} = 40$ ;  $\Pi_f = 3,98$  кГц.

**3.28р.** Из условия согласования нагрузки с внутренним сопротивлением источника можно записать  $R'_н = z_{вх}(\omega_0) = R_i = 50$  Ом, где  $R'_н$  – сопротивление нагрузки в последовательной схеме замещения (см. задачу 3.27р). Находим эквивалентную добротность, характеристическое сопротивление, емкость и общую индуктивность контура:  $Q_{эк} = f_0/\Pi_f = 11,2$ ;  $\rho = (R_i + R'_н)Q_{эк} = 1,12$  кОм;  $C = 1/(2\pi f_0 \rho) = 5,08$  пФ;  $L = \rho/(2\pi f_0) = 6,37$  мкГн. Индуктивность  $L_2$  может быть найдена с учетом соотношения между сопротивлениями нагрузки  $R'_н$  и  $R_н$  в последовательной и параллельной схемах замещения (см. задачу 2.56м):  $L_2 = R_н/(2\pi f_0 \sqrt{(R_н/R'_н) - 1}) = 1,82$  мкГн. Индуктивность в последовательной схеме замещения (см. задачу 2.56м):  $L'_2 = L_2/[1 + (2\pi f_0 L_2/R_н)^2] = 1,77$  мкГн, следовательно,  $L_1 = L - L_2 = 4,60$  мкГн.

**3.29м.** Необходимо преобразовать цепь в последовательную, заменив параллельную цепочку  $C_2R_n$  эквивалентной последовательной цепочкой  $C'_2R'_n$  (см. указания к задаче 3.27р).

**3.30м.** Эквивалентная добротность контура  $Q_{\text{эк}}$  определяется эквивалентным сопротивлением потерь  $R_{\text{эк}} = R + R_i$ , учитывающим все виды потерь в контуре. Отрицательное дифференциальное сопротивление  $R_i$  включенного в контур дополнительного двухполосника указывает на то, что этот двухполосник отдает энергию в контур, а его рабочая точка находится на падающем участке вольт-амперной характеристики (см. рис. Т1.4, б).

**3.31м.** Для того чтобы найти эквивалентную добротность контура, необходимо определить два неизвестных: индуктивность и сопротивление потерь контура, а для того чтобы найти отношение эквивалентных добротностей, достаточно найти только одно неизвестное — отношение индуктивности к сопротивлению, которое можно определить по полосе пропускания ненагруженного контура.

### 3.3. Параллельный колебательный контур

**3.32р.** Определите резонансную частоту  $f_0$ , характеристическое сопротивление  $\rho$ , добротность  $Q$  и резонансное сопротивление  $R_0$  контура (рис. Т3.14), если  $L = 0,2$  мГн;  $R = 12$  Ом;  $C = 360$  пФ.

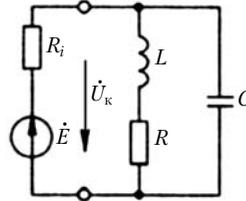


Рис. Т3.14

**3.33р.** К параллельному колебательному контуру (см. задачу 3.32р) подключен источник гармонического

напряжения, частота которого совпадает с резонансной частотой контура. Параметры источника:  $E = 1$  В;  $R_i = 120$  кОм. Найдите действующие значения тока источника, напряжения на контуре, тока емкостной и индуктивной ветвей контура.

**3.34.** Рассчитайте эквивалентную добротность и ширину полосы пропускания контура, рассмотренного в задаче 3.33р.

**3.35м.** Для контура, рассмотренного в задаче 3.32р, определите модуль  $z(\omega)$  и аргумент  $\varphi(\omega)$  комплексного входного сопротивления на частотах, соответствующих следующим значениям относительной расстройки:  $\delta_1 = 10^{-2}$ ;  $\delta_2 = -10^{-2}$ ;  $\delta_3 = 10^{-1}$ ;  $\delta_4 = -10^{-1}$ .

**3.36м.** Найдите комплексную амплитуду напряжения на контуре, рассмотренном в задаче 3.33р, если ЭДС источни-

ка  $e = 0,707\cos[(\omega_0 + \Omega)t]$  В, где  $\omega_0$  — резонансная угловая частота контура;  $\Omega_1 = 0,01\omega_0$ ;  $\Omega_2 = -0,01\omega_0$ ;  $\Omega_3 = 0,1\omega_0$ ;  $\Omega_4 = -0,1\omega_0$ ;  $R_i = 160$  кОм.

**3.37р.** Определите частоты резонанса токов  $f_{0T}$ , напряжений  $f_{0H}$ , добротность  $Q$ , характеристическое сопротивление  $\rho$ , коэффициент включения  $p_L$  и резонансное сопротивление  $R_0(p_L)$  сложного параллельного контура (рис. Т3.15). Параметры элементов цепи:  $L_1 = 150$  мкГн;  $L_2 = 50$  мкГн;  $C = 240$  пФ;  $R_1 = 10$  Ом;  $R_2 = 4$  Ом.

**3.38.** Решите задачу 3.37р при  $L_1 = 50$  мкГн;  $L_2 = 150$  мкГн.

**3.39р.** Вычислите частоты резонансов токов  $f_{0T}$  и напряжений  $f_{0H}$ , характеристическое сопротивление  $\rho$ , добротность  $Q$ , коэффициент включения  $p_c$ , резонансное сопротивление контура  $R_0(p_c)$ , эквивалентную добротность  $Q_{эк}$ , полосу пропускания  $\Pi_f$  и действующее значение напряжения на контуре  $U_k$  на резонансных частотах. Параметры элементов цепи (рис. Т3.16):  $L = 220$  мкГн;  $C_1 = 48$  пФ;  $C_2 = 320$  пФ;  $R = 16$  Ом;  $R_i = 100$  кОм;  $E = 24$  В.

**3.40.** Решите задачу 3.39р при  $C_1 = 320$  пФ;  $C_2 = 48$  пФ.

**3.41.** Определите тип сложного параллельного колебательного контура и найдите его сопротивление потерь  $R$ , если на частотах  $f_1 = 17$  МГц,  $f_2 = 51$  МГц полное входное сопротивление контура  $z_{вх}$  достигает соответственно своих максимального и минимального значений, причем на частоте  $f_1$  добротность контура  $Q = 40$ , а  $z_{вх} = z_{вх \max} = 20$  кОм.

**3.42м.** Найдите резонансные частоты, характеристическое сопротивление, добротность и резонансное сопротивление сложного параллельного колебательного контура, схема которого приведена на рис. Т3.17. Параметры элементов контура:  $R_1 = 12$  Ом;  $L_1 = 220$  мкГн;  $C_1 = 270$  пФ;  $R_2 = 9,6$  Ом;  $L_2 = 640$  мкГн;  $C_2 = 410$  пФ.

**3.43р.** Как изменится полоса пропускания сложного параллельного контура после подключения к нему источника

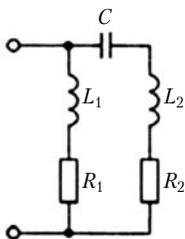


Рис. Т3.15

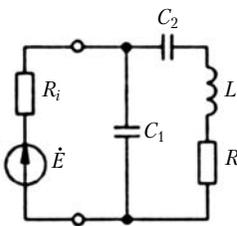


Рис. Т3.16

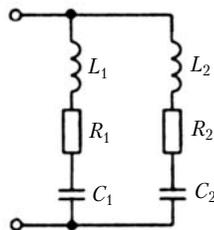


Рис. Т3.17

с внутренним сопротивлением  $R_i$ , если коэффициент включения контура выбран таким образом, чтобы потребляемая контуром активная мощность была максимальной?

**3.44.** В сложном параллельном колебательном контуре (см. рис. Т3.15)  $\omega_{0T} = 0,22 \cdot 10^6$  рад/с;  $C = 5$  нФ;  $Q = 48$ . Определите коэффициент включения контура, при котором после подключения к контуру источника энергии с внутренним сопротивлением  $R_i = 20$  кОм полоса пропускания контура будет иметь следующее значение:  $\Pi_{\omega} = 10^4$  рад/с.

### Решения и методические указания

**3.32р.** В случае малых потерь резонансная частота, характеристическое сопротивление и добротность параллельного колебательного контура совпадают с соответствующими параметрами последовательного колебательного контура, составленного из тех же элементов:  $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC}) = 593$  кГц;  $\rho = \sqrt{L/C} = 745$  Ом;  $Q = \rho/R = 62,1$ . Резонансное сопротивление параллельного колебательного контура в  $Q$  раз превышает его характеристическое сопротивление:  $R_0 = Q\rho = \rho^2/R = 46,3$  кОм.

**3.33р.** На частоте резонанса токов входное сопротивление контура имеет резистивный характер и равно  $R_0$ . Действующее значение тока в неразветвленной части цепи  $I_0 = E/(R_i + R_0) = 6,01$  мА. Напряжение на контуре  $U_{к0} = R_0 I_0 = 0,278$  В. В случае малых потерь действующие значения тока емкостной и индуктивной ветвей на частоте резонанса токов приблизительно в  $Q$  раз превышают действующее значение тока в неразветвленной части контура:  $I_{C0} I_{L0} U_{к0} / \rho = Q I_0 = 0,374$  мА.

**3.35м.** Комплексное входное сопротивление параллельного колебательного контура  $Z_{\text{вх}} = z_{\text{вх}} e^{j\varphi_{\text{вх}}} = \frac{R_0}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{-j \arctg \xi}$ . Определение обобщенной расстройки  $\xi$  см. в указаниях к задаче 3.21м.

**3.36м.** Комплексная амплитуда напряжения на контуре  $\dot{U}_{mk} = \dot{E}_m Z_{\text{вх}} / (R_i + Z_{\text{вх}})$ , где  $Z_{\text{вх}} = \frac{R_0}{1 + \xi^2} - j \frac{R_0 \xi}{1 + \xi^2}$ ;  $\xi = Q \left[ \frac{\omega_0 + \Omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_0 + \Omega} \right]$ .

**3.37р.** Частота резонанса токов, добротность и характеристическое сопротивление сложного параллельного колебательного контура в случае малых потерь совпадают с частотой

резонанса напряжений, добротностью и характеристическим сопротивлением последовательного колебательного контура, составленного из тех же элементов:  $f_{0m} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1 + L_2)C}} = 726$  кГц;  $\rho = \sqrt{(L_1 + L_2)C} = 913$  Ом;  $Q = \rho/(R_1 + R_2) = 65,2$ .

Частота резонанса напряжения определяется параметрами ветви, содержащей емкость  $C$  и индуктивность  $L_2$ :  $f_{0н} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2C}} = 1,45$  МГц.

Коэффициент включения контура  $p_L$  определяется отношением индуктивности  $L_1$  индуктивной ветви к суммарной индуктивности контура:  $p_L = L_1/(L_1 + L_2) = 0,75$ . Резонансное сопротивление контура  $R_0(p_L) = (p_L\rho)^2/(R_1 + R_2) = 33,5$  кОм.

**3.39р.** Частота резонанса токов, добротность и характеристическое сопротивление сложного параллельного колебательного контура в случае малых потерь совпадают с частотой резонанса напряжений, добротностью и характеристическим сопротивлением последовательного контура, составленного

из тех же элементов:  $f_{0т} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1C_2(C_1 + C_2)}} = 1,66$  МГц;  $\rho = \sqrt{L(C_1 + C_2)/(C_1C_2)} = 2,3$  кОм;  $Q = \rho/R = 143$ .

Частота резонанса напряжений сложного параллельного контура определяется параметрами ветви, содержащей емкость  $C_2$  и индуктивность  $L$ :  $f_{0н} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_2}} = 600$  кГц. Коэф-

фициент включения контура  $p_c = C_2/(C_1 + C_2) = 0,87$ . Резонансное сопротивление  $R_0(p_c) = p_c^2\rho Q = 249$  кОм. Эквивалентная добротность  $Q_{эк} = Q/(1 + R_0(p_c)/R_i) = 41,1$ . Ширина полосы пропускания цепи  $\Pi_f = f_{0т}/Q_{эк} = 40,4$  кГц. На резонансных частотах входное сопротивление контура имеет резистивный характер, а действующие значения напряжения на контуре определяются следующими выражениями:  $U_{к0т} = ER_0(p_c)/[R_0(p_c) + R_i] = 17,1$  В;  $U_{к0н} = ER/(R + R_i) = 3,84$  мВ.

**3.42м.** Резонансное сопротивление рассматриваемого контура можно определить, используя выражение для комплексного входного сопротивления контура

$$Z_{вх} = \frac{\left(R_1 + j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C_1}\right)\left(R_2 + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C_2}\right)}{R_1 + R_2 + j\left[\omega(L_1 + L_2) - \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2}\right)\right]}.$$

В случае высокой добротности контура на частоте резонанса токов выполняются следующие условия:

$$\left| \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right| \gg R_1; \quad \left| \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right| \gg R_2;$$

$$\omega(L_1 + L_2) - \frac{1}{\omega} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \approx 0.$$

С учетом этого

$$Z_{\text{вх}}(\omega_{0r}) = R_0 \approx - \left[ \omega_{0r} L_1 - \frac{1}{\omega_{0r} C_1} \right] \left[ \omega_{0r} L_2 - \frac{1}{\omega_{0r} C_2} \right] \frac{1}{R_1 + R_2}.$$

**3.43р.** При согласовании контура с нагрузкой на резонансной частоте его резонансное сопротивление должно быть равно сопротивлению источника:  $R_0(p) = R_i$ . Так как эквивалентная добротность контура  $Q_{\text{эк}} = Q/[1+R_0(p)/R_i]$ , то при подключении согласованного источника эквивалентная добротность уменьшается, а полоса пропускания контура увеличивается в 2 раза.

### 3.4. Связанные колебательные контуры

**3.45р.** Для системы двух связанных контуров (рис. Т3.18) с одинаковыми параметрами:  $R_1 = R_2 = R = 24 \text{ Ом}$ ;  $C_1 = C_2 = C = 1,2 \text{ нФ}$ ;  $C_{12} = 18 \text{ нФ}$ ;  $L_1 = L_2 = L = 0,5 \text{ мГн}$  определите резонансную частоту  $f_0$  и добротность  $Q$  каждого из контуров, коэффициент связи  $k$ , параметр связи  $A$  и максимально возможное значение тока  $I_{2 \text{ max max}}$  при  $E = 1 \text{ В}$ .

**3.46р.** Для цепи, рассмотренной в задаче 3.45р, определите частоты связи  $f_1, f_2$ , действующие значения тока вторичного контура и напряжения на емкости  $C_2$  на резонансной частоте и частотах связи.

**3.47м.** Два связанных колебательных контура (см. рис. Т3.18) с одинаковыми параметрами настроены индивидуально на резонансную частоту  $f_0 = 0,8 \text{ МГц}$ . Найдите значения  $C_1 = C_2 = C$  и  $C_{12}$ , соответствующие настройке на полный резонанс при  $L_1 = L_2 = L = 120 \text{ мкГн}$ ;  $Q_1 = Q_2 = Q = 60$ .

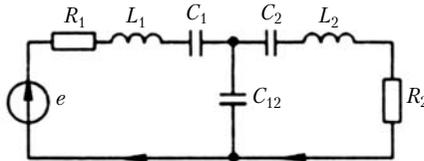


Рис. Т3.18

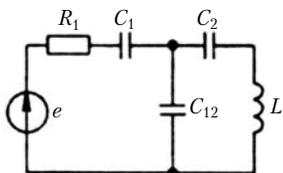


Рис. Т3.19

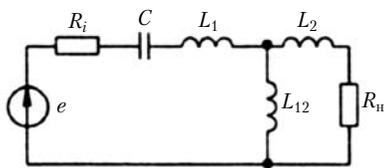


Рис. Т3.20

**3.48.** Используя данные задачи 3.47м, определите емкости  $C_1 = C_2 = C$  и  $C_{12}$ , соответствующие: а)  $A_1 = 0,5$ ; б)  $A_2 = 1$ ; в)  $A_3 = 2$ .

**3.49.** Определите значения емкостей  $C$  и  $C_{12}$  при внешней емкостной связи между контурами, параметры которых даны в задаче 3.48.

**3.50р.** Вычислите частоту настройки на второй частный резонанс  $f_{02}$  для системы связанных апериодического и колебательного контуров (рис. Т3.19) со следующими параметрами:  $R_i = 200$  Ом;  $C_1 = 3,2$  нФ;  $C_2 = 2$  нФ;  $C_{12} = 4,8$  нФ;  $L = 0,6$  мГн.

**3.51м.** Для цепи (рис. Т3.20) определите емкость  $C$ , соответствующую настройке на первый частный резонанс, при  $L_1 = 20$  мкГн;  $L_2 = 1,5$  мкГн;  $L_{12} = 4$  мкГн;  $R_H = 50$  Ом;  $\omega_{01} = 5,5 \cdot 10^7$  рад/с.

**3.52.** В системе двух одинаковых колебательных контуров с внутренней индуктивной связью определите значение индуктивности связи  $L_{12}$ , при котором: а)  $A = 0,5$ ; б)  $A = 1$ ; в)  $A = 2,41$ . Параметры контуров:  $L_{11} = L_{22} = 0,8$  мГн;  $C_1 = C_2 = 1,2$  нФ;  $R_1 = R_2 = 40,8$  Ом.

**3.53.** Для системы контуров, рассмотренных в задаче 3.52, найдите диапазон частот, в котором амплитуда тока вторичного контура уменьшается по сравнению со своим максимальным значением в  $n$  раз, если  $n_1 = 2$ ;  $n_2 = 2$ ;  $n_3 = 10$ ;  $n_4 = 100$ .

### Решения и методические указания

**3.45р.** Собственные емкости обоих контуров имеют одинаковые значения:  $C_{11} = C_{22} = CC_{12}/(C + C_{12}) = 1125$  пФ. Резонансные частоты и добротности контуров также одинаковы:  $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC_{11}}) = 212,2$  кГц;  $Q = (\sqrt{LC_{11}})/R = 27,8$ . Коэффициент связи между контурами  $k = \sqrt{C_{11}C_{22}}/C_{12} = 0,0625$ . Параметр связи  $A = kQ = 1,74$ . Максимально возможное значение тока второго контура  $I_{2 \max \max} = E/(2R) = 20,8$  мА.

**3.46р.** Обобщенные расстройки, соответствующие частотам связи  $f_1$  и  $f_2$  для контуров с одинаковыми параметрами  $\xi_{1,2} = \pm\sqrt{A^2 - 1} = \pm 1,42$ . Для расчета частот связи  $f_1$  и  $f_2$  воспользуемся приближенным соотношением  $\xi \approx 2Q_f/f_0$ , откуда  $\Delta_f = f_0\xi/(2Q) = \pm 5,42$  кГц;  $f_{1,2} = f_0 \pm \Delta_f$ ;  $f_1 = 206,8$  кГц;  $f_2 = 217,6$  кГц.

Действующее значение тока вторичного контура определяется следующим выражением:

$$I_2 = 2AI_{2\max\max}/\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}.$$

На резонансной частоте ( $\xi = 0$ ) ток вторичного контура  $I_2(f_0) = 2AI_{2\max\max}/(1 + A^2) = 18$  мА. На частотах связи ток вторичного контура достигает значения  $I_{2\max\max}$ :  $I_2(f_1) = I_2(f_2) = 20,8$  мА. Напряжение на емкостном элементе определяется в соответствии с законом Ома для действующих значений  $U_C = I/(\omega C)$ , откуда  $U_{C_2}(f_0) = 11,3$  В;  $U_{C_2}(f_1) = 13,4$  В;  $U_{C_2}(f_2) = 12,7$  В.

**3.47м.** Настройке системы связанных контуров с одинаковыми параметрами на полный резонанс соответствует оптимальное значение коэффициента связи  $k = k_{\text{opt}} = 1/Q$ . Для случая внутренней емкостной связи коэффициент связи может быть выражен через емкости цепи следующим образом (см. задачу 3.45р):  $k = \sqrt{C_{11}C_{22}}/C_{12}$ . Собственные емкости контуров могут быть определены по известной резонансной частоте и индуктивности контуров.

**3.50р.** Условие настройки контуров на второй частный резонанс заключается в равенстве нулю суммы реактивных составляющих собственного сопротивления вторичного контура  $x_{22}$  и сопротивления  $x_{\text{вн}2}$ , вносимого во вторичной контур:  $x_{22} + x_{\text{вн}2} = 0$ , где  $x_{\text{вн}2} = -x_{11}x_{12}^2/(R_i^2 + x_{11}^2)$ ;  $x_{22} = \omega_{02}L - 1/(\omega_{02}C_{22})$ ;  $x_{11} = -1/(\omega_{02}C_{11})$  — реактивная составляющая собственного сопротивления первичного контура;  $x_{12} = -1/(\omega_{02}C_{12})$  — реактивная составляющая сопротивления связи;  $C_{11} = C_1C_{12}/(C_1 + C_{12})$ ;  $C_{22} = C_2C_{12}/(C_2 + C_{12})$  — собственные емкости первичного и вторичного контуров;  $\omega_{02}$  — искомая угловая частота.

Подставляя выражения для  $x_{22}$  и  $x_{\text{вн}2}$  в условие второго частотного резонанса, получим уравнение для определения частоты второго частного резонанса  $\omega_{02}^4 + a\omega_{02}^2 + b = 0$ , где  $a = (LC_{22} - R_i^2C_{11}^2)/(LC_{22}R_i^2C_{11}^2) = 5,60 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-2}$ ;  $b = (C_{11}C_{22} - C_{12}^2)/(LC_{22}C_{11}^2R_i^2C_{12}^2) = -7,06 \cdot 10^{24} \text{ с}^{-4}$ .

Решив это уравнение, найдем  $\omega_{02} = 1,03 \cdot 10^6$  рад/с;  $f_{02} = 164$  кГц.

**3.51м.** См. решение задачи 3.50р.

**3.53м.** При  $A < 1$  обобщенная расстройка  $\xi_{\text{гр}}$ , соответствующая граничной частоте искомого диапазона, может быть найдена из выражения  $n = I_2(\xi = 0)/I_2(\xi_{\text{гр}})$ ; при  $A \geq 1$   $n = \frac{I_{2\text{max max}}}{I_2(\xi_{\text{гр}})}$ , где  $I_{2\text{max max}} = \frac{E}{2R}$ ;  $I_2(\xi) = \frac{EA}{R\sqrt{(1+A^2-\xi^2)^2+4\xi^2}}$ .

# Глава 4

## АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

### 4.1. Методы формирования уравнений электрического равновесия цепи

**4.1р.** Для электрической цепи, схема которой приведена на рис. Т4.1, составьте систему уравнений электрического равновесия методом токов ветвей.

**4.2р.** Для электрической цепи, схема которой приведена на рис. Т4.1, составьте систему уравнений электрического равновесия методом напряжений ветвей.

**4.3.** Для электрической цепи (см. рис. Т1.14) составьте систему уравнений электрического равновесия методом токов ветвей.

**4.4.** Для электрической цепи (см. рис. Т1.14) составьте систему уравнений электрического равновесия методом напряжений ветвей.

**4.5р.** Для цепи рис. Т4.2 постройте граф, определите число его узлов  $q$  и ветвей  $p$ , число независимых узлов  $m$  и число независимых контуров  $n$ . Постройте одно из возможных деревьев графа и найдите соответствующую систему независимых контуров. Составьте уравнения электрического

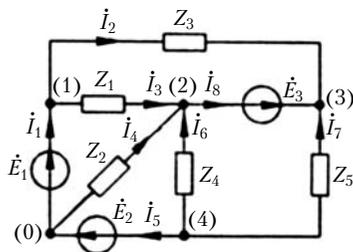


Рис. Т4.1

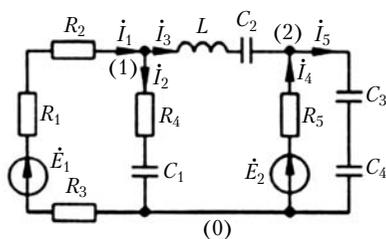


Рис. Т4.2

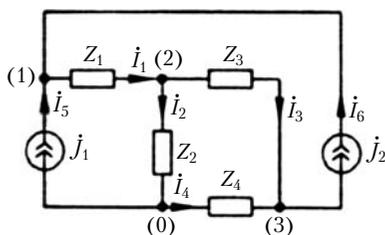


Рис. Т4.3

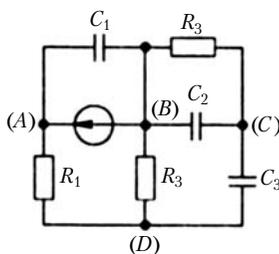


Рис. Т4.4

равновесия методами токов ветвей, напряжений ветвей, контурных токов и узловых напряжений.

**4.6.** Составьте уравнения электрического равновесия методом контурных токов для цепи, рассмотренной в задаче 4.1р.

**4.7р.** Для цепи (рис. Т4.3) составьте систему уравнений электрического равновесия, используя метод контурных токов.

**4.8р.** Для цепи рис. Т4.4 составьте систему уравнений электрического равновесия методом узловых напряжений.

**4.9м.** Для цепи, рассмотренной в задаче 4.1р, составьте уравнения электрического равновесия методом узловых напряжений.

**4.10р.** Определите токи ветвей цепи (рис. Т4.5), применив метод узловых напряжений. Параметры элементов цепи:  $R_1 = R_3 = 1 \text{ кОм}$ ;  $R_2 = 2 \text{ кОм}$ ;  $R_4 = 0,8 \text{ кОм}$ ;  $R_5 = 4 \text{ кОм}$ ;  $R_6 = 5 \text{ кОм}$ ;  $C_1 = 1 \text{ нФ}$ ;  $C_2 = 2 \text{ нФ}$ ;  $L_1 = 1 \text{ мГн}$ ;  $L_2 = 4 \text{ мГн}$ ;  $\dot{E}_1 = 10 \text{ В}$ ;  $\dot{E}_2 = 2 \text{ В}$ ;  $\dot{j} = e^{-j60^\circ} \text{ мА}$ ;  $\omega = 0,2 \cdot 10^6 \text{ рад/с}$ .

**4.11.** Решите задачу 2.38м методом контурных токов.

**4.12р.** Вычислите комплексную амплитуду тока источника ЭДС цепи рис. Т4.6. Параметры элементов цепи:

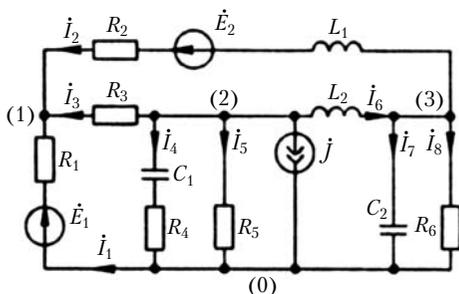


Рис. Т4.5

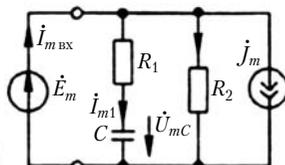


Рис. Т4.6

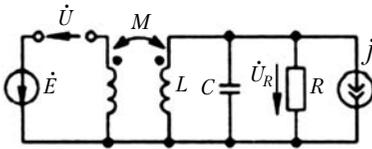


Рис. Т4.7

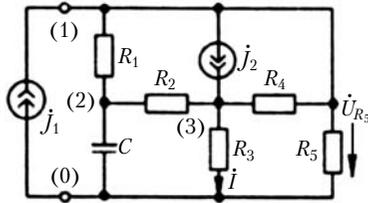


Рис. Т4.8

$R_1 = 1 \text{ МОм}; R_2 = 0,1 \text{ МОм}; C = 100 \text{ пФ}; \dot{E}_m = 0,1 \text{ В}; \dot{J}_m = S\dot{U}_{mC}; S = 4 \text{ мСм}; \omega = 10^6 \text{ рад/с}.$

**4.13м.** Найдите действующее значение напряжения  $U_R$  в цепи (рис. Т4.7) при  $\omega_1 = 10^6 \text{ рад/с}; \omega_2 = 0,9 \cdot 10^6 \text{ рад/с}$ . Параметры элементов цепи:  $R = 20 \text{ кОм}; C = 1 \text{ нф}; L = 1 \text{ мГн}; M = 0,08 \text{ мГн}; \dot{J} = S\dot{U}; S = 0,5 \text{ мСм}; \dot{E} = 10 \text{ мВ}.$

**4.14.** Используя уравнения электрического равновесия, составленные методом контурных токов для цепи (рис. Т4.8), определите напряжение на сопротивлении  $R_5$  и реактивную мощность, отдаваемую источником тока  $\dot{J}_1$ . Параметры элементов цепи:  $R_1 = 1 \text{ МОм}; R_2 = 50 \text{ Ом}; R_3 = 200 \text{ Ом}; R_4 = 20 \text{ кОм}; R_5 = 100 \text{ кОм}; C = 100 \text{ пФ}; \dot{J}_1 = 0,1 \text{ мА}; \dot{J}_2 = 0,998\dot{I}; \omega = 10^6 \text{ рад/с}.$

**4.15.** Используя уравнения электрического равновесия, составленные по методу узловых напряжений для цепи (рис. Т4.9), вычислите комплексное входное сопротивление участка цепи, подключенного к источнику тока  $\dot{J}_1$ . Параметры элементов цепи:  $R_1 = 1 \text{ МОм}; R_2 = 100 \text{ кОм}; C = 100 \text{ пФ}; \dot{J}_1 = 0,1 \text{ мА}; \dot{J}_2 = S\dot{U}_{10}; S = 2 \text{ мСм}; \omega = 10^6 \text{ рад/с}$ . Найдите значение того же сопротивления при увеличении  $S$  в 2 раза.

**4.16.** Используя метод узловых напряжений, определите комплексное действующее значение напряжения на сопротивлении  $R_2$  цепи (рис. Т4.10), если  $R_1 = 20 \text{ кОм}; R_2 = 1 \text{ кОм}; R_3 = 10 \text{ Ом}; C_1 = 0,5 \text{ пФ}; C_2 = 2 \text{ пФ}; C_3 = 18 \text{ пФ}; \dot{E} = 0,1 \text{ мВ}; f = 160 \text{ МГц}; \dot{J} = S\dot{U}; S = 0,2 \text{ мСм}.$

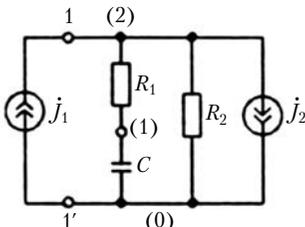


Рис. Т4.9

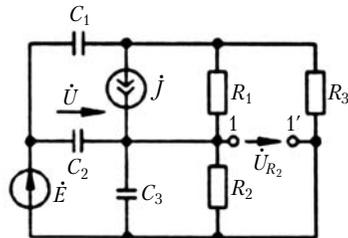


Рис. Т4.10

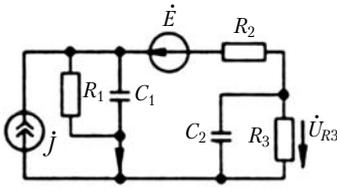


Рис. Т4.11

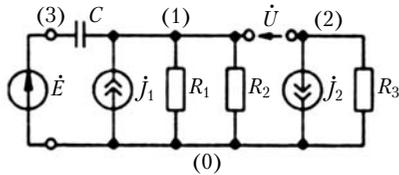


Рис. Т4.12

**4.17м.** Применяя метод контурных токов, найдите комплексное действующее значение напряжения на сопротивлении  $R_3$  цепи (рис. Т4.11), если  $R_1 = 200 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 8 \text{ кОм}$ ;  $R_3 = 2 \text{ кОм}$ ;  $C_1 = 120 \text{ пФ}$ ;  $C_2 = 64 \text{ пФ}$ ;  $j = 10 \text{ мА}$ ;  $\dot{E} = Z\dot{I}$ ;  $Z = 2 \cdot 10^3 e^{-j\tau\omega} \text{ Ом}$ ;  $\tau = 0,2 \text{ мкс}$ ;  $\omega = 2,5 \cdot 10^6 \text{ рад/с}$ .

**4.18.** Используя метод узловых напряжений, найдите напряжения на элементах цепи (рис. Т4.12). Определите параметры элементов последовательной схемы замещения участка цепи, подключенного к источнику ЭДС. Параметры элементов цепи:  $R_2 = 200 \text{ кОм}$ ;  $R_3 = 100 \text{ кОм}$ ;  $C = 1 \text{ мкФ}$ ;  $J_1 = S\dot{U}$ ;  $J_2 = S\dot{E}$ ;  $S = 2 \text{ мСм}$ ;  $\dot{E} = 1 \text{ мВ}$ ;  $\omega = 400 \text{ рад/с}$ . Решите задачу, если: а)  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ; б)  $R_1 = 2 \text{ кОм}$ .

**4.19.** Решите предыдущую задачу для цепи (рис. Т4.13), если  $C = 1 \text{ мкФ}$ ;  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = R_3 = 200 \text{ кОм}$ ;  $j = S(\dot{E} - \dot{U}_{30})$ ;  $S = 2 \text{ мСм}$ ;  $\dot{E} = 1 \text{ мВ}$ ;  $\omega = 400 \text{ рад/с}$ .

**4.20.** Используя метод узловых напряжений, определите напряжения  $\dot{U}_{20}$ ,  $\dot{U}_{50}$  и параметры элементов последовательной схемы замещения участка цепи, подключенного к источнику ЭДС цепи (рис. Т4.14). Параметры элементов цепи:  $R_1 = 6 \text{ кОм}$ ;  $R_2 = 50 \text{ кОм}$ ;  $R_3 = 4 \text{ кОм}$ ;  $R_4 = 40 \text{ кОм}$ ;  $R_5 = 2 \text{ кОм}$ ;  $R_6 = 10 \text{ Ом}$ ;  $C = 1 \text{ нФ}$ ;  $E = 10 \text{ мВ}$ ;  $J_1 = S_1 \dot{U}_{12}$ ;  $J_2 = S_2 \dot{U}_{32}$ ;  $J_3 = S_3 \dot{U}_{42}$ ;  $S_1 = S_2 = 2 \text{ мСм}$ ;  $S_3 = 5 \text{ мСм}$ ;  $\omega = 10^5 \text{ рад/с}$ .

**4.21р.** Используя метод контурных токов, рассчитайте отношение токов  $\dot{I}_3/\dot{I}_4$  цепи (рис. Т4.15), если  $R_1 = R_9 = 400 \text{ Ом}$ ;

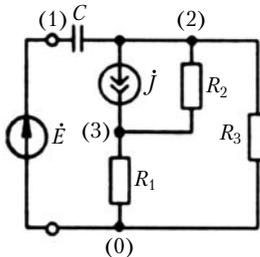


Рис. Т4.13

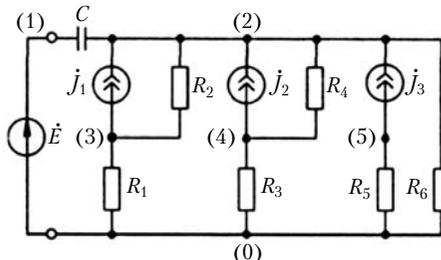


Рис. Т4.14

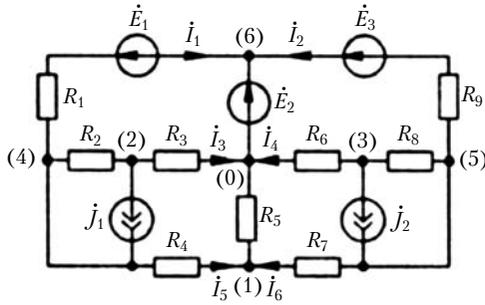


Рис. Т4.15

$R_2 = R_8 = 25 \text{ кОм}; R_3 = R_6 = 2 \text{ кОм}; R_4 = R_7 = 50 \text{ Ом}; R_5 = 20 \text{ кОм};$   
 $\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = \dot{E}_3 = \dot{E}; \dot{J}_1 = \beta_1 \dot{I}_1; \dot{J}_2 = \beta_2 \dot{I}_2; \beta_1 = 100; \beta_2 = 105.$

4.22. С помощью метода узловых напряжений определите напряжение  $\dot{U}_{30}$  цепи (рис. Т4.16). Параметры элементов цепи:  $R_1 = 50 \text{ Ом}; R_2 = 1,2 \text{ кОм}; R_3 = 20 \text{ кОм}; C_1 = 20 \text{ пФ}; C_2 = 2 \text{ пФ}; \dot{E} = 1 \text{ мВ}; \dot{J} = S \dot{U}_{12}; S = 10 \text{ мСм}; \omega = 2 \cdot 10^7 \text{ рад/с}.$

### Решения и методические указания

4.1р. Граф цепи и одно из его деревьев приведены на рис. Т4.17, а, б.

Число ветвей цепи  $p = 8$ , число узлов  $q = 5$ , причем три ветви состоят только из источников напряжения ( $p_{\text{нн}} = 3$ ) и ни одна из ветвей не содержит источников тока ( $p_{\text{ит}} = 0$ ). Система уравнений электрического равновесия, составленная методом токов ветвей, включает восемь уравнений, из которых четыре составлены на основании первого закона Кирхгофа (число независимых узлов  $q - 1 = 4$ ):

$$\begin{aligned} -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 &= 0; \\ -\dot{I}_3 - \dot{I}_4 - \dot{I}_6 + \dot{I}_8 &= 0; \end{aligned}$$

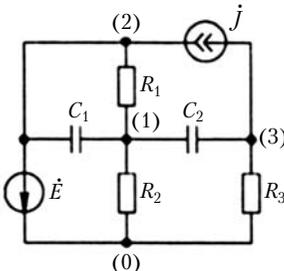


Рис. Т4.16

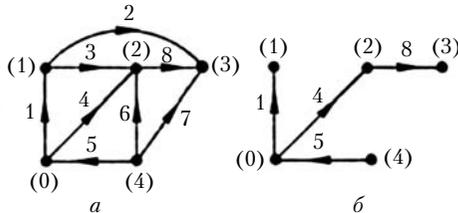


Рис. Т4.17

$$-\dot{I}_2 - \dot{I}_7 - \dot{I}_8 = 0;$$

$$\dot{I}_5 + \dot{I}_6 + \dot{I}_7 = 0$$

и четыре уравнения — на основании второго закона Кирхгофа (число независимых контуров  $p - q + 1 = 4$ )

$$Z_1 \dot{I}_3 - Z_2 \dot{I}_4 = \dot{E}_1;$$

$$-Z_2 \dot{I}_4 + Z_4 \dot{I}_6 = -\dot{E}_2;$$

$$Z_3 \dot{I}_2 - Z_2 \dot{I}_4 = \dot{E}_1 - \dot{E}_3;$$

$$Z_5 \dot{I}_7 - Z_2 \dot{I}_4 = -\dot{E}_2 - \dot{E}_3.$$

Напряжения всех ветвей, не содержащих источников напряжения, выражены через токи соответствующих ветвей.

**4.2р.** Число неизвестных напряжений ветвей цепи  $p - p_{\text{ин}} = 5$  (см. решение предыдущей задачи). На основании второго закона Кирхгофа можно записать четыре уравнения баланса напряжений:

$$\dot{U}_3 - \dot{U}_4 = \dot{E}_1;$$

$$-\dot{U}_4 + \dot{U}_6 = -\dot{E}_2;$$

$$\dot{U}_2 - \dot{U}_4 = \dot{E}_1 - \dot{E}_3;$$

$$\dot{U}_7 - \dot{U}_4 = -\dot{E}_2 - \dot{E}_3.$$

Пятое уравнение составляем на основании первого закона Кирхгофа для главного сечения  $\{2, 3, 4, 6, 7\}$ , в которое не входит ни одна ветвь, содержащая источник напряжения:

$$\dot{U}_2/Z_3 + \dot{U}_3/Z_1 + \dot{U}_4/Z_4 + \dot{U}_6/Z_4 + \dot{U}_7/Z_5 = 0.$$

Нумерация напряжений соответствует нумерации токов ветвей.

**4.5р.** Граф данной цепи приведен на рис. Т4.18, а. Число ветвей  $p = 5$ ; число узлов  $q = 3$ , число независимых узлов графа  $m = q - 1 = 2$ , число независимых контуров  $n = p - q + 1 = 3$ . Если выбранное дерево графа состоит из ветвей 2 и 4, то, добавляя к дереву поочередно главные ветви 1,

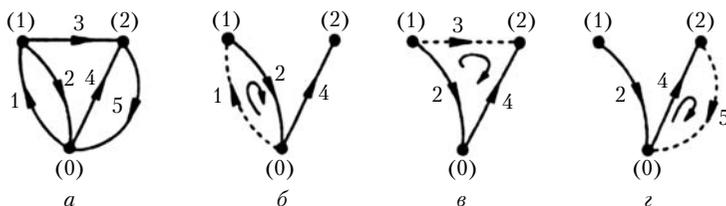


Рис. Т4.18

3, 5 (рис. Т4.18, б – з), получаем систему независимых контуров. Поскольку данная цепь не имеет вырожденных ветвей, т.е. ветвей, содержащих источники тока или состоящих только из источников напряжения, число неизвестных токов (напряжений) ветвей равно числу ветвей  $p = 5$ .

Для рассматриваемой цепи можно составить  $m = 2$  уравнения по первому закону Кирхгофа и  $n = 3$  уравнения по второму закону Кирхгофа. Уравнения электрического равновесия, полученные методом токов ветвей, имеют вид

$$\begin{aligned} -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 &= 0; \\ -\dot{I}_3 - \dot{I}_4 + \dot{I}_5 &= 0; \\ (R_1 + R_2 + R_3)\dot{I}_1 + \left[ R_4 - j\frac{1}{\omega C_1} \right] \dot{I}_2 &= \dot{E}_1; \\ -R_5\dot{I}_4 - \left[ R_4 - j\frac{1}{\omega C_1} \right] \dot{I}_2 + j\left[ \omega L - j\frac{1}{\omega C_2} \right] \dot{I}_3 &= -\dot{E}_2; \\ R_5\dot{I}_4 - j\frac{1}{\omega} \left[ \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \right] \dot{I}_5 &= \dot{E}_2. \end{aligned}$$

Выразив токи через напряжения соответствующих ветвей, запишем уравнения для напряжений ветвей:

$$\begin{aligned} -\frac{\dot{U}_1 + \dot{E}_1}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{\dot{U}_2}{R_4 - j\frac{1}{\omega C_1}} + \frac{\dot{U}_3}{j\left( \omega L - \frac{1}{\omega C_2} \right)} &= 0; \\ -\frac{\dot{U}_3}{j\left( \omega L - \frac{1}{\omega C_2} \right)} - \frac{\dot{U}_4 + \dot{E}_2}{R_5} + \frac{\dot{U}_5}{-j\frac{1}{\omega} \left( \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \right)} &= 0; \\ \dot{U}_1 + \dot{U}_2 &= 0; \\ -\dot{U}_2 + \dot{U}_3 - \dot{U}_4 &= 0; \\ \dot{U}_4 + \dot{U}_5 &= 0. \end{aligned}$$

По методу контурных токов для данной цепи можно составить  $n = 3$  уравнения. Левая часть  $i$ -го контурного уравнения содержит  $n$  слагаемых, одно из которых является произведением  $i$ -го контурного тока на собственное сопротивление  $i$ -го контура, а остальные — произведениями контурных токов других контуров на общие сопротивления  $i$ -го контура и этих контуров; правая часть  $i$ -го уравнения равна контурной ЭДС  $i$ -го контура:

$$\begin{aligned}Z_{(11)}\dot{I}_{11} + Z_{(12)}\dot{I}_{22} + Z_{(13)}\dot{I}_{33} &= \dot{E}_{11}; \\Z_{(21)}\dot{I}_{11} + Z_{(22)}\dot{I}_{22} + Z_{(23)}\dot{I}_{33} &= \dot{E}_{22}; \\Z_{(31)}\dot{I}_{11} + Z_{(32)}\dot{I}_{22} + Z_{(33)}\dot{I}_{33} &= \dot{E}_{33}.\end{aligned}$$

Собственное сопротивление  $i$ -го контура равно сумме сопротивлений всех ветвей, входящих в данный контур, следовательно,

$$\begin{aligned}Z_{(11)} &= R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - j\frac{1}{\omega C_1}; \\Z_{(22)} &= R_4 + R_5 + j\omega L - j\frac{1}{\omega C_1} - j\frac{1}{\omega C_2}; \\Z_{(33)} &= R_5 - j\frac{1}{\omega C_3} - j\frac{1}{\omega C_4}.\end{aligned}$$

Общее сопротивление  $i$ -го и  $j$ -го контуров равно алгебраической сумме сопротивлений ветвей, входящих одновременно в  $i$ -й и  $j$ -й контуры, причем если контурные токи  $\dot{I}_{ii}$  и  $\dot{I}_{jj}$  в общих ветвях направлены встречно, то перед суммой ставится знак «минус», поэтому

$$\begin{aligned}Z_{(12)} = Z_{(21)} &= -\left[R_4 - j\frac{1}{\omega C_1}\right]; \\Z_{(13)} = Z_{(31)} &= 0; \\Z_{(23)} = Z_{(32)} &= -R_5.\end{aligned}$$

Контурная ЭДС  $i$ -го контура равна алгебраической сумме ЭДС идеализированных источников напряжения, входящих в данный контур, поэтому  $\dot{E}_{11} = \dot{E}_1$ ;  $\dot{E}_{22} = -\dot{E}_2$ ;  $\dot{E}_{33} = \dot{E}_2$ .

Таким образом, уравнения электрического равновесия данной цепи, составленные методом контурных токов, имеют вид

$$\begin{aligned}\left[R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - j\frac{1}{\omega C_1}\right]\dot{I}_{11} - \left[R_4 - j\frac{1}{\omega C_1}\right]\dot{I}_{22} &= \dot{E}_1; \\-\left[R_4 - j\frac{1}{\omega C_1}\right]\dot{I}_{11} - \left[R_4 + R_5 + j\omega L - j\frac{1}{\omega C_1} - j\frac{1}{\omega C_2}\right]\dot{I}_{22} - R_5\dot{I}_{33} &= -\dot{E}_2; \\-R_5\dot{I}_{22} + \left[R_5 - j\frac{1}{\omega C_3} - j\frac{1}{\omega C_4}\right]\dot{I}_{33} &= \dot{E}_2.\end{aligned}$$

Для построения узловых уравнений преобразуем исходную цепь (см. рис. Т4.2), заменив источники напряжения  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$  источниками тока  $\dot{J}_1 = \dot{E}_1/(R_1 + R_2 + R_3)$  и  $\dot{J}_2 = \dot{E}_2/R_5$  (рис. Т4.19). По методу узловых напряжений для данной

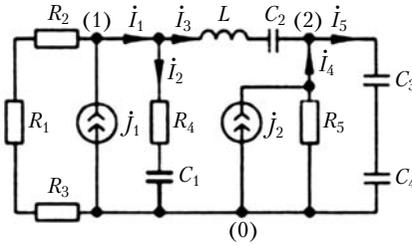


Рис. Т4.19

цепи можно составить  $m = 2$  уравнения. Левая часть  $i$ -го узлового уравнения содержит  $m$  слагаемых, одно из которых является произведением  $i$ -го узлового напряжения на собственную проводимость  $i$ -го узла, а остальные — произведениями узловых напряжений других узлов на общие проводимости  $i$ -го и этих узлов; правая часть  $i$ -го уравнения равна узловому току  $i$ -го узла:

$$Y_{(11)}\dot{U}_{10} + Y_{(12)}\dot{U}_{20} = \dot{J}_{10};$$

$$Y_{(21)}\dot{U}_{10} + Y_{(22)}\dot{U}_{20} = \dot{J}_{20}.$$

Собственная проводимость узла равна сумме проводимостей всех ветвей, подключенных к данному узлу, следовательно,

$$Y_{(11)} = \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{1}{R_4 - j\frac{1}{\omega C_1}} + \frac{1}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C_2}};$$

$$Y_{(22)} = \frac{1}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C_2}} + \frac{1}{R_5} + j\omega\frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}.$$

Общая проводимость  $i$ -го и  $j$ -го узлов равна сумме проводимостей ветвей, включенных непосредственно между этими узлами, взятой с противоположным знаком, поэтому

$$Y_{(12)} = Y_{(21)} = -\frac{1}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C_2}}.$$

Узловой ток какого-либо узла равен алгебраической сумме токов источников тока, подключенных к этому узлу, поэтому  $\dot{J}_{10} = \dot{J}_1$ ,  $\dot{J}_{20} = \dot{J}_2$ .

Таким образом, узловые уравнения данной цепи имеют вид

$$\left[ \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{1}{R_4 - j\frac{1}{\omega C_1}} + \frac{1}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C_2}} \right] \dot{U}_{10} - \frac{1}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C_2}} \dot{U}_{20} = \frac{\dot{E}_1}{R_1 + R_2 + R_3};$$

$$- \frac{1}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C_2}} \dot{U}_{10} + \left[ \frac{1}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C_2}} + \frac{1}{R_5} + j\omega \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} \right] \dot{U}_{20} = \frac{\dot{E}_2}{R_5}.$$

**4.7р.** Граф данной цепи приведен на рис. Т4.20, *а*. Выберем дерево графа таким образом, чтобы ветви 5 и 6, содержащие идеальные источники тока, не вошли в дерево, т.е. стали главными ветвями. Пусть выбранное дерево содержит ветви 1, 2 и 4. Добавив к дереву поочередно главные ветви 3, 5 и 6, получим три независимых контура (рис. Т4.20, *б* – *г*). Контурные токи двух последних контуров известны — они равны токам ветвей 5 и 6, содержащих идеальные источники тока. Для определения единственного неизвестного контурного тока первого контура  $\dot{I}_{11} = \dot{I}_3$  составим контурное уравнение:

$$(Z_2 + Z_3 + Z_4)\dot{I}_{11} - Z_2\dot{I}_{22} - (Z_2 + Z_4)\dot{I}_{33} = 0,$$

где  $\dot{I}_{22} = \dot{I}_5 = \dot{J}_1$ ,  $\dot{I}_{33} = \dot{I}_6 = \dot{J}_2$ .

**4.8р.** Источник напряжения  $\dot{E}$  не может быть заменен источником тока, поэтому выберем один из узлов, к которому подключен источник в качестве базисного. Присвоим узлам схемы *A*, *B*, *C* и *D* соответственно номера 1, 0, 2 и 3. Узловое напряжение первого узла известно, оно равно напряжению идеализированного источника:  $\dot{U}_{10} = \dot{E}_1$ . Для определения узловых напряжений  $\dot{U}_{20}$ ,  $\dot{U}_{30}$  составим уравнения для узлов 2 и 3:

$$Y_{(11)}\dot{U}_{10} + Y_{(22)}\dot{U}_{20} + Y_{(23)}\dot{U}_{30} = 0;$$

$$Y_{(31)}\dot{U}_{10} + Y_{(32)}\dot{U}_{20} + Y_{(33)}\dot{U}_{30} = 0,$$

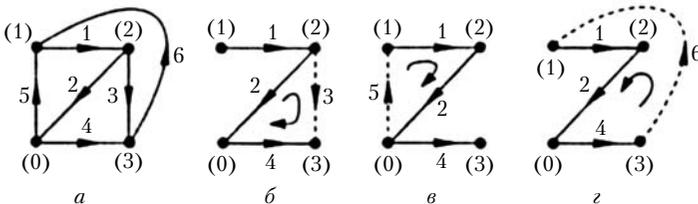


Рис. Т4.20

где  $Y_{(22)} = 1/R_3 + j\omega(C_2 + C_3)$ ;  $Y_{(33)} = 1/R_1 + 1/R_2 + j\omega C_3$  — собственные проводимости;  $Y_{(21)} = 0$ ;  $Y_{(23)} = Y_{(32)} = -j\omega C_3$ ;  $Y_{(31)} = -1/R_1$  — общие проводимости узлов.

**4.9м.** Цепь содержит три вырожденные ветви, состоящие из идеальных источников напряжения, которые не имеют общей точки соединения. Переносим источник  $\dot{E}_3$  из ветви 8 в ветви 2 и 7, заменим схему цепи, приведенную на рис. Т4.1, эквивалентной схемой (рис. Т4.21). В полученной схеме источники напряжения  $\dot{E}_3$ , находящиеся в ветвях 2 и 7, могут быть заменены источниками тока, а вырожденные источники  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$  имеют общую точку, которую следует выбрать в качестве базисного узла.

**4.10р.** Преобразуем данную цепь, представляя ветви цепи их проводимостями и заменив источники напряжения источниками тока:  $Y_1 = 1/R_1$ ;  $Y_2 = 1/R_3$ ;  $Y_3 = 1/R_5 + 1/[R_4 - j/(\omega C_1)]$ ;  $Y_4 = 1/(R_2 + j\omega L_1)$ ;  $Y_5 = 1/(j\omega L_2)$ ;  $Y_6 = 1/R_6 + j\omega C_2$ ;  $\dot{J}_1 = \dot{E}_1 Y_1$ ;  $\dot{J}_2 = \dot{E}_2 Y_4$  (рис. Т4.22).

Для схемы (см. рис. Т4.22) составим уравнения по методу узловых напряжений:

$$\begin{aligned} Y_{(11)}\dot{U}_{10} + Y_{(12)}\dot{U}_{20} + Y_{(13)}\dot{U}_{30} &= \dot{J}_{10}; \\ Y_{(21)}\dot{U}_{10} + Y_{(22)}\dot{U}_{20} + Y_{(23)}\dot{U}_{30} &= \dot{J}_{20}; \\ Y_{(31)}\dot{U}_{10} + Y_{(32)}\dot{U}_{20} + Y_{(33)}\dot{U}_{30} &= \dot{J}_{30}, \end{aligned}$$

где  $\dot{U}_{10}$ ,  $\dot{U}_{20}$ ,  $\dot{U}_{30}$  — узловые напряжения;  $Y_{(11)} = Y_1 + Y_2 + Y_4 = (2,49 - j0,049) \cdot 10^{-3}$  См;  $Y_{(22)} = Y_2 + Y_3 + Y_5 = (1,28 - -j1,06) \cdot 10^{-3}$  См;  $Y_{(33)} = Y_4 + Y_5 + Y_6 = (0,695 - j0,9) \cdot 10^{-3}$  См — собственные проводимости узлов;  $Y_{(12)} = Y_{(21)} = -Y_2 = -10^{-3}$  См;  $Y_{(13)} = Y_{(31)} = -Y_4 = (-0,495 + j0,0495) \cdot 10^{-3}$  См;  $Y_{(23)} = Y_{(32)} = -Y_5 = j1,25 \cdot 10^{-3}$  См — общие проводимости узлов;  $\dot{J}_{10} = \dot{J}_1 + \dot{J}_2 = (10,99 - j0,1) \cdot 10^{-3}$  А;  $\dot{J}_{20} = -\dot{J} = (-0,5 + j0,866) \cdot 10^{-3}$  А;  $\dot{J}_{30} = -\dot{J}_2 = (-0,99 + j0,099) \cdot 10^{-3}$  А — узловые токи.

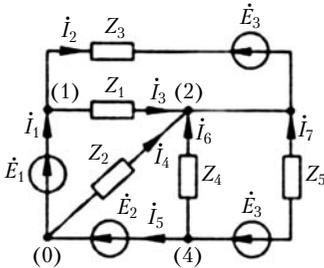


Рис. Т4.21

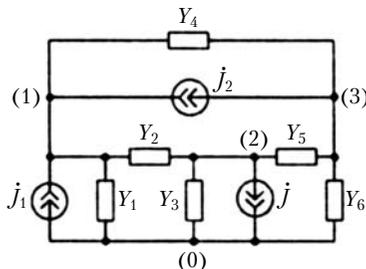


Рис. Т4.22

Вычислим определитель матрицы  $Y$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} Y_{(11)} & Y_{(12)} & Y_{(13)} \\ Y_{(21)} & Y_{(22)} & Y_{(23)} \\ Y_{(31)} & Y_{(32)} & Y_{(33)} \end{vmatrix} = (2,83 - j2,32) \cdot 10^{-9} \text{ См}^3.$$

Определители  $\Delta_i$  получим из выражения для  $\Delta$  заменой  $i$ -го столбца на столбец узловых токов  $\Delta_1 = (16,9 - j17,7) \times 10^{-9} \text{ А} \cdot \text{См}^2$ ;  $\Delta_2 = (7,9 - j11,2) \cdot 10^{-9} \text{ А} \cdot \text{См}^2$ ;  $\Delta_3 = (6,88 - -j15,4) \cdot 10^{-9} \text{ А} \cdot \text{См}^2$ . Используя эти значения, найдем узловые напряжения:

$$\dot{U}_{10} = \Delta_1/\Delta = 6,65 - j0,796 = 6,69e^{-j6,38^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{20} = \Delta_2/\Delta = 3,61 - j0,995 = 3,75e^{-j15,4^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{30} = \Delta_3/\Delta = 4,122 - j2,055 = 4,61e^{-j26,5^\circ} \text{ В}$$

и токи ветвей:

$$\dot{I}_1 = (\dot{E}_1 - \dot{U}_{10})/R_1 = 3,44e^{j13,4^\circ} \text{ мА};$$

$$\dot{I}_2 = (\dot{E}_2 + \dot{U}_{30} - \dot{U}_{10})/(R_2 + j\omega L_1) = 0,677e^{j118,2^\circ} \text{ мА};$$

$$\dot{I}_3 = (\dot{U}_{20} - \dot{U}_{10})/R_3 = 3,04e^{j183,8^\circ} \text{ мА};$$

$$\dot{I}_4 = \dot{U}_{20}/(R_4 + j/\omega C_1) = 0,739e^{j65,5^\circ} \text{ мА};$$

$$\dot{I}_5 = \dot{U}_{20}/R_5 = 0,937e^{-j15,4^\circ} \text{ мА};$$

$$\dot{I}_6 = (\dot{U}_{20} - \dot{U}_{30})/j\omega L_2 = 1,47e^{j25,8^\circ} \text{ мА};$$

$$\dot{I}_7 = \dot{U}_{30}j\omega C_2 = 1,84e^{j63,5^\circ} \text{ мА};$$

$$\dot{I}_8 = \dot{U}_{30}/R_6 = 0,92e^{-j26,5^\circ} \text{ мА}.$$

Для оценки точности расчетов проверим выполнение баланса мощностей в цепи. Комплексная мощность, отдаваемая источниками,  $P_{S\text{отд}} = \dot{E}_1 \dot{I}_1^* + \dot{E}_2 \dot{I}_2^* - \dot{U}_{20} \dot{I}_3^* = 30,2 - j9,4 \text{ мВ} \cdot \text{А}$ . Комплексная мощность, потребляемая пассивными элементами,

$$P_{S\text{потр}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_8^2 R_6 + \\ + j[I_2^2 \omega L_1 I_4^2 / (\omega C_1) + I_6^2 \omega L - I_7^2 / (\omega C_2)] = 30,2 - j9,4 \text{ мВ} \cdot \text{А}.$$

**4.12р.** Используя метод токов ветвей, составим уравнения электрического равновесия цепи:

$$\dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2} + \dot{J}_m - \dot{I}_{m\text{вх}} = 0; \quad \dot{I}_{m1} \left[ R_1 - j \frac{1}{\omega C} \right] = \dot{E}_m; \quad \dot{I}_{m2} R_2 = \dot{E}_m,$$

где  $\dot{J}_m = S \dot{U}_{mC} = -jS \dot{I}_{m1} / (\omega C)$  — ток зависимого источника.

Последовательно исключая из полученных уравнений  $\dot{I}_{m2}, \dot{J}_m$  и  $\dot{I}_{m1}$ , найдем

$$I_{m\text{вх}} = -\frac{\dot{E}_m}{R_1 - j\frac{1}{\omega C}} + \frac{\dot{E}_m}{R_2} + \frac{j\dot{E}_m S}{\left(R_1 - j\frac{1}{\omega C}\right)\omega C},$$

откуда  $\dot{I}_{m\text{вх}} = 4,15e^{-j74^\circ}$  мкА.

**4.13м.** Для данной цепи уравнение электрического равновесия удобно записать, используя первый закон Кирхгофа:  $[1/R + j\omega C - j/(\omega L)]\dot{U}_R = -S\dot{U}$ . Управляющее напряжение  $\dot{U}$  необходимо выразить через искомое напряжение  $\dot{U}_R$ . Согласно

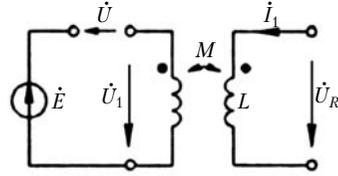


Рис. Т4.23

второму закону Кирхгофа  $-\dot{U} + \dot{U}_1 = \dot{E}$  (рис. Т4.23) и с учетом компонентных уравнений связанных индуктивностей  $\dot{U}_1 = j\omega M\dot{I}_1$ ;  $\dot{U}_R = j\omega L\dot{I}_1$  получим  $\dot{U} = -\dot{E} + \dot{U}_R M/L$ .

**4.17м.** Цепь содержит источник напряжения, ЭДС которого зависит от тока, не являющегося током какой-либо ветви. Чтобы составить уравнения электрического равновесия, в цепь необходимо включить источник ЭДС  $\dot{E}_0 = 0$  таким образом, чтобы его ток был бы управляющим для зависимого источника.

**4.21р.** Заменяем управляемые источники тока источниками напряжения. Схема преобразованной цепи представлена на рис. Т4.24, а. Выберем дерево графа этой цепи таким образом, чтобы ветви с управляющими токами вошли в число главных ветвей (рис. Т4.24, б).

Обозначая  $\dot{I}_{11} = \dot{I}_3$ ;  $\dot{I}_{22} = \dot{I}_4$ ;  $\dot{I}_{33} = \dot{I}_1$ ;  $\dot{I}_{44} = \dot{I}_2$ , запишем систему контурных уравнений цепи в следующем виде:

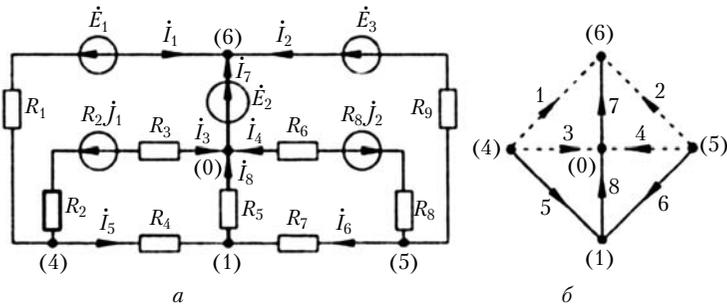


Рис. Т4.24

$$\begin{aligned}
 (R_2 + R_3 + R_4 + R_5)\dot{I}_{11} + R_5\dot{I}_{22} + (\beta_1 R_2 + R_4 + R_5)\dot{I}_{33} + R_5\dot{I}_{44} &= 0; \\
 R_5\dot{I}_{11} + (R_5 + R_6 + R_7 + R_8)\dot{I}_{22} + R_5\dot{I}_{33} + (\beta_2 R_8 + R_5 + R_7)\dot{I}_{44} &= 0; \\
 (R_4 + R_5)\dot{I}_{11} + R_5\dot{I}_{22} + (R_1 + R_4 + R_5)\dot{I}_{33} + R_5\dot{I}_{44} &= -2\dot{E}; \\
 R_5\dot{I}_{11} + (R_5 + R_7)\dot{I}_{22} + R_5\dot{I}_{33} + (R_5 + R_7 + R_9)\dot{I}_{44} &= 0.
 \end{aligned}$$

Используя формулу Крамера, определим выражения для контурных токов  $\dot{I}_{11}$  и  $\dot{I}_{22}$ :  $\dot{I}_{11} = -2\dot{E} \frac{\Delta_{31}}{\Delta_z}$ ;  $\dot{I}_{22} = -2\dot{E} \frac{\Delta_{32}}{\Delta_z}$ . Следовательно,

$$\frac{\dot{I}_3}{\dot{I}_4} = \frac{\dot{I}_{11}}{\dot{I}_{22}} = \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{32}} = \frac{\begin{vmatrix} R_5 & (\beta_1 R_2 + R_4 + R_5) & R_5 \\ (R_5 + R_6 + R_7 + R_8) & R_5 & (\beta_2 R_8 + R_5 + R_7) \\ (R_4 + R_5) & R_5 & (R_5 + R_7 + R_9) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) & (\beta_1 R_2 + R_4 + R_5) & R_5 \\ R_5 & R_5 & (\beta_2 R_8 + R_5 + R_7) \\ R_5 & R_5 & (R_5 + R_7 + R_9) \end{vmatrix}}.$$

Подставив в полученное выражение числовые значения параметров элементов, найдем  $\dot{I}_3/\dot{I}_4 = 1,003$ .

## 4.2. Основные теоремы теории цепей и их применение для анализа

**4.23р.** Определите ток  $\dot{I}_3$  цепи (рис. Т4.25), используя метод наложения. Параметры элементов цепи:  $R_1 = 6 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 4 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 12 \text{ Ом}$ ;  $\dot{E}_1 = 120 \text{ В}$ ;  $\dot{E}_2 = 100 \text{ В}$ .

**4.24.** Используя метод наложения, найдите ток  $\dot{I}_3$  цепи (рис. Т4.26). Параметры элементов цепи:  $R_1 = 6 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 4 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 12 \text{ Ом}$ ;  $\dot{E}_1 = 120 \text{ В}$ ;  $\dot{E}_2 = 100e^{j90^\circ} \text{ В}$ ;  $\dot{J} = 2e^{-j40^\circ} \text{ А}$ .

**4.25м.** Рассчитайте напряжение  $\dot{U}_R$  цепи (рис. Т4.27), используя метод наложения. Параметры элементов цепи:

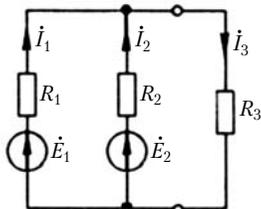


Рис. Т4.25

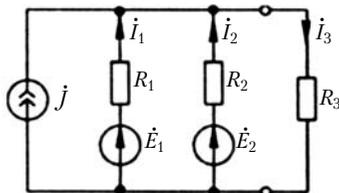


Рис. Т4.26

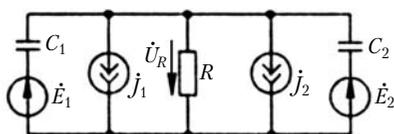


Рис. Т4.27

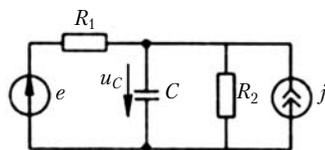


Рис. Т4.28

$R = 1 \text{ кОм}; C_1 = C_2 = 1 \text{ пФ}; j_1 = S_1 \dot{E}_1; j_2 = S_2 \dot{E}_2; S_1 = 1,5 \text{ мСм}; S_2 = 1 \text{ мСм}; \dot{E}_1 = 0,1 \text{ В}; \dot{E}_2 = 0,2 \text{ В}; f = 200 \text{ МГц}.$

**4.26.** Используя метод наложения, определите мгновенное значение напряжения на емкости (рис. Т4.28). Параметры элементов цепи:  $R_1 = R_2 = 2 \text{ кОм}; C = 1 \text{ нФ}; e = 2 \cos(2 \cdot 10^6 t) \text{ В}; j = 0,04 \text{ А}.$

**4.27.** Применяя метод наложения, определите токи ветвей цепи (рис. Т4.29). Используя полученные результаты, покажите, что цепь является взаимной. Параметры элементов цепи:  $R_1 = 12 \text{ кОм}; R_2 = 10 \text{ кОм}; R_3 = 200 \text{ Ом}; L_1 = 0,5 \text{ мГн}; L_2 = 12 \text{ мГн}; \dot{E}_1 = 80 \text{ В}; \dot{E}_2 = 120 \text{ В}; \omega = 5 \cdot 10^6 \text{ рад/с}.$

**4.28р.** Найдите ток  $\dot{I}_2$  вторичной обмотки идеального трансформатора (рис. Т4.30), используя принцип наложения и теорему взаимности. Параметры элементов цепи:  $R_1 = 100 \text{ Ом}; R_2 = 10 \text{ кОм}; C_1 = 5 \text{ нФ}; C_2 = 2 \text{ нФ}; L = 4 \text{ мГн}; n = 0,2; \dot{E}_1 = 0,1 \text{ В}; \dot{E}_2 = 2 \text{ В}; \omega = 0,4 \cdot 10^6 \text{ рад/с}.$

**4.29.** Используя принцип наложения и теорему взаимности, определите токи  $\dot{I}_1, \dot{I}_2$  в цепи, рассмотренной в задаче 4.23р.

**4.30р.** Решите задачу 4.23р, используя теорему об эквивалентном источнике.

**4.31м.** Решите задачу 4.28р, используя теорему об эквивалентном источнике.

**4.32.** Определите ток  $\dot{I}_1$  (рис. Т4.31), используя теорему об эквивалентном источнике. Параметры элементов цепи:  $R_1 = R_6 = 200 \text{ Ом}; R_2 = R_5 = 500 \text{ Ом}; R_3 = R_4 = 1 \text{ кОм}; \dot{E}_1 = \dot{E}_3 = 10 \text{ В}; \dot{E}_2 = 2 \text{ В}.$

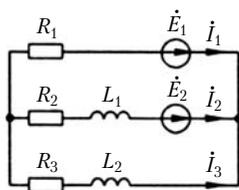


Рис. Т4.29

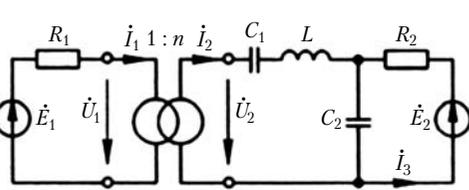


Рис. Т4.30

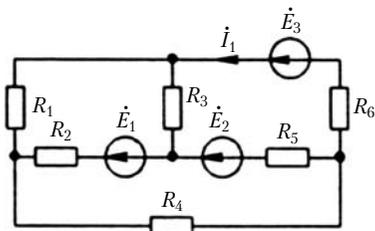


Рис. Т4.31

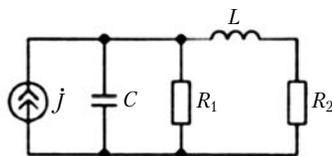


Рис. Т4.32

**4.33.** Для цепи (рис. Т4.32) найдите значение сопротивления  $R_2$ , при котором в нем выделяется максимальная активная мощность, а также значение этой мощности, если  $R_1 = 2 \text{ кОм}$ ;  $C = 10 \text{ нФ}$ ;  $L = 5 \text{ мГн}$ ;  $j_1 = 0,2 \text{ А}$ ;  $\omega = 10^5 \text{ рад/с}$ .

**4.34р.** Найдите параметры элементов параллельной схемы замещения неавтономного двухполюсника (рис. Т4.33) если  $R_1 = R_2 = 0,8 \text{ МОм}$ ;  $L = 10 \text{ мкГн}$ ;  $j = S\dot{U}_L$ ;  $S = 10 \text{ мСм}$ ;  $f = 100 \text{ МГц}$ .

**4.35.** Получите выражение для угловой частоты  $\omega_1$ , на которой аргумент комплексного входного сопротивления неавтономного двухполюсника (рис. Т4.34) имеет минимальное значение при  $R_1 = R_2 = R$ .

**4.36.** Найдите полное входное сопротивление неавтономного двухполюсника (рис. Т4.35), если  $R_1 = 1 \text{ кОм}$ ;  $R_2 = R_3 = 10 \text{ кОм}$ ;  $C = 10 \text{ пФ}$ ;  $f = 1,59 \text{ МГц}$ ;  $S = 1 \text{ мСм}$ .

**4.37.** Запишите выражения для параметров элементов параллельных схем замещения активных двухполюсников, схемы которых изображены на рис. Т4.36,  $a - в$ .

**4.38м.** Определите параметры элементов последовательной схемы замещения активного двухполюсника, схема которого приведена на рис. Т4.10, а параметры элементов указаны в задаче 4.16.

**4.39м.** Найдите параметры элементов последовательной схемы замещения активного двухполюсника (рис. Т4.37),

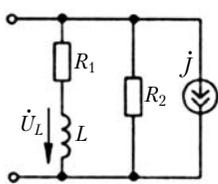


Рис. Т4.33

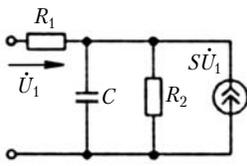


Рис. Т4.34

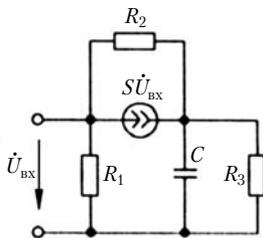


Рис. Т4.35

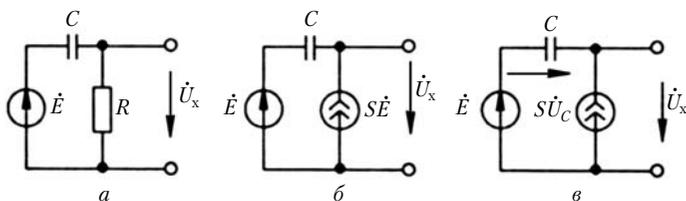


Рис. Т4.36

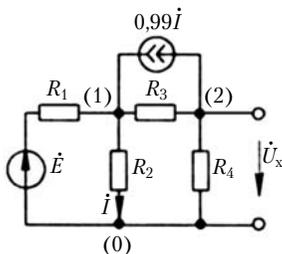


Рис. Т4.37

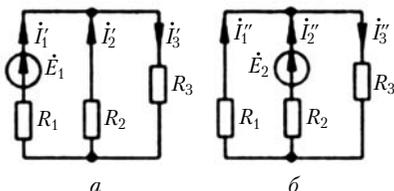


Рис. Т4.38

если  $R_1 = 2 \text{ кОм}$ ;  $R_2 = 200 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 30 \text{ кОм}$ ;  $R_4 = 10 \text{ кОм}$ ;  $\dot{E} = 0,1 \text{ В}$ .

### Решения и методические указания

**4.23р.** В соответствии с принципом наложения ток  $\dot{I}_3$  может быть найден как сумма частичных токов  $\dot{I}_3'$  и  $\dot{I}_3''$ , протекающих в той же ветви под действием каждого из источников напряжения  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$  в отдельности. Схемы замещения для определения токов  $\dot{I}_3'$  и  $\dot{I}_3''$  представлены на рис. Т4.38, а, б. При этом

$$\dot{I}_3' = \frac{\dot{E}_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 3,33 \text{ А};$$

$$\dot{I}_3'' = \frac{\dot{E}_2}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 4,17 \text{ А};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_3'' + \dot{I}_3' = 7,5 \text{ А}.$$

**4.25м.** Напряжение  $\dot{U}_R$  находят как сумму частичных напряжений, вызванных действием независимых источников напряжений  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$  в отдельности.

**4.28р.** Заменив идеальный трансформатор его комплексной схемой замещения, отключим независимые источники

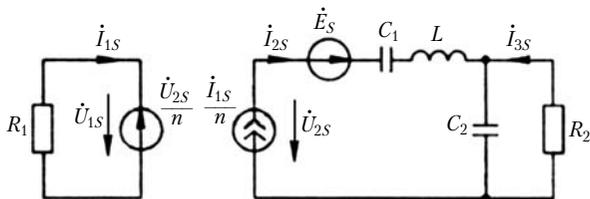


Рис. Т4.39

напряжения  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$ , а в ветвь, ток которой необходимо определить, введем дополнительный источник ЭДС  $\dot{E}_S$  (рис. Т4.39). Найдем токи ветвей, в которые были включены источники ЭДС  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$ :

$$\dot{I}_{1S} = n\dot{I}_{2S}; \quad \dot{I}_{3S} = -\frac{\dot{I}_{2S}}{R_2} \frac{R_2/(j\omega C_2)}{R_2 R_2 + 1/(j\omega C_2)} = -\frac{\dot{I}_{2S}}{1 + j\omega R_2 C_2},$$

где

$$\dot{I}_{2S} = \frac{\dot{E}_S}{n^2 R_1 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1}\right) + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}},$$

откуда  $\dot{I}_{1S}/\dot{E}_S = (0,751 + j0,622) \cdot 10^{-3}$  См;  $\dot{I}_{3S}/\dot{E}_S = (-0,441 + j0,414) \cdot 10^{-3}$  См.

Учитывая взаимность данной цепи (цепь содержит только пассивные линейные элементы, неуправляемые источники и идеальный трансформатор), можно записать следующие соотношения:  $\dot{I}'_2/\dot{E}_1 = \dot{I}_{1S}/\dot{E}_S$ ;  $\dot{I}''_2/\dot{E}_2 = \dot{I}_{3S}/\dot{E}_S$ , где  $\dot{I}'_2$  и  $\dot{I}''_2$  — частичные токи, вызванные действием источников ЭДС  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$ . В соответствии с принципом наложения

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2 = \frac{\dot{I}_{1S}}{\dot{E}_S} \dot{E}_1 + \frac{\dot{I}_{3S}}{\dot{E}_S} \dot{E}_2 = (-0,807 + j0,891) \cdot 10^{-3} = \\ &= 1,2 \cdot 10^{-3} e^{j132,1^\circ} \text{ А} \end{aligned}$$

**4.30р.** Заменяем часть цепи, расположенную слева от зажимов 1 — 1', эквивалентным источником напряжения  $\dot{E}$  с внутренним сопротивлением  $R_i$  (рис. Т4.40, а). ЭДС  $\dot{E}$  этого источника равна напряжению  $\dot{U}_x$  на зажимах 1 — 1' исходной цепи при отключенной ветви  $R_3$  (рис. Т4.40, б):

$$\dot{E} = \dot{U}_x = \dot{E}_2 + \frac{\dot{E}_1 - \dot{E}_2}{R_1 + R_2} R_2 = 108 \text{ В.}$$

Внутреннее сопротивление  $R_i$  эквивалентного источника равно входному сопротивлению цепи рис. Т4.40, б при вы-

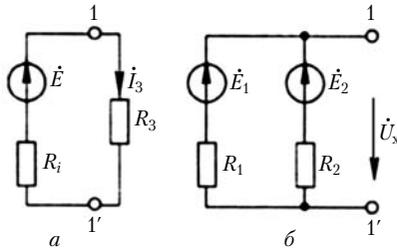


Рис. Т4.40

ключенных источниках  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$ :  $R_i = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 2,4$  Ом. В соответствии с эквивалентной схемой рис. Т4.40, а ток  $\dot{I}_3 = \dot{E} / (R_i + R_3) = 7,5$  А.

**4.31м.** Целесообразно участок цепи с идеальным трансформатором и элементами  $\dot{E}_1$ ,  $R_1$  заменить одним эквивалентным источником, а участок с элементами  $\dot{E}_2$ ,  $R_2$ ,  $C_2$  — другим, включенным последовательно с первым.

**4.34р.** Подключим к входу цепи пробный источник напряжения  $\dot{E}$  и найдем комплексное действующее значение входного тока двухполюсника:

$$\dot{I}_{\text{вх}} = \dot{E} \left[ \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2} + \frac{j\omega LS}{R_1 + j\omega L} \right],$$

откуда комплексная входная проводимость цепи

$$Y_{\text{вх}} = \frac{\dot{I}_{\text{вх}}}{\dot{E}} = \frac{R_1 + R_2 + j\omega L(1 + SR_2)}{R_2(R_1 + j\omega L)} = 3,12 + j78,5 \text{ мкСм.}$$

Параметры элементов параллельной схемы замещения:  $R'' = 1/g_{\text{вх}} = 321$  кОм;  $C'' = b_{\text{вх}}/\omega = 0,125$  пФ (см. задачу 2.53м).

**4.38м.** Напряжение холостого хода цепи вычислено в задаче 4.16. Для определения внутреннего сопротивления активного двухполюсника необходимо найти ток короткого замыкания:  $Z_{\text{вх}} = \dot{U}_x / \dot{I}_k$ .

**4.39м.** Для нахождения напряжения холостого хода целесообразно воспользоваться методом узловых напряжений:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \dot{U}_{10} - \frac{1}{R_3} \dot{U}_{12} &= \frac{1}{R_1} \dot{E} + \frac{0,99}{R_2} \dot{U}_{10}; \\ -\frac{1}{R_3} \dot{U}_{10} + \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \dot{U}_{20} &= -\frac{0,99}{R_2} \dot{U}_{10}, \end{aligned}$$

где  $\dot{U}_{20} = \dot{U}_x$ .

Для вычисления тока короткого замыкания нужно найти узловое напряжение  $\dot{U}_{10к}$  при короткозамкнутом выходе, положив в первом узловом уравнении  $U_{20} = 0$ :

$$\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \dot{U}_{10к} = \frac{1}{R_1} \dot{E} + \frac{0,99}{R_2} \dot{U}_{10к}.$$

Ток короткого замыкания можно выразить через  $\dot{U}_{10к}$ , используя первый закон Кирхгофа:  $\dot{I}_к = \dot{U}_{10к}(1/R_3 - 0,99/R_2)$ .

### 4.3. Метод сигнальных графов

**4.40.** Составьте системы уравнений для графов, приведенных на рис. Т4.41 и Т4.42.

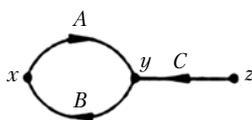


Рис. Т4.41

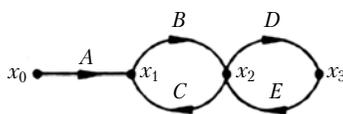


Рис. Т4.42

**4.41м.** Постройте два-три равносильных сигнальных графа для каждой из систем уравнений (1) и (2):

$$\begin{aligned} (E - 1)y + Dz &= -Ax; \\ Cy - z &= 0; \\ By + Fz - w &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (1 - D)x_1 &= Ax_0; \\ x_2 - Ex_3 &= Bx_0; \\ x_3 - Hx_4 &= Cx_0; \\ Fx_1 + Gx_2 - x_4 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

**4.42.** Составьте систему уравнений для сигнального графа (рис. Т4.43).

**4.43р.** Определите передачу сигнального графа (рис. Т4.44) между истоком  $x$  и стоком  $w$ .

**4.44р.** Найдите передачу сигнального графа (см. рис. Т4.41) от узла  $x$  к узлу  $z$ .

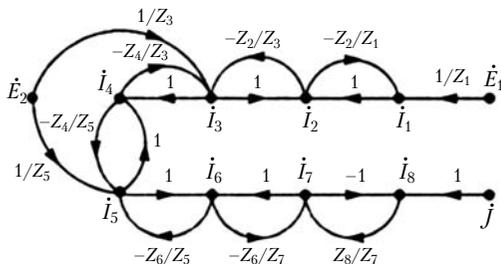


Рис. Т4.43

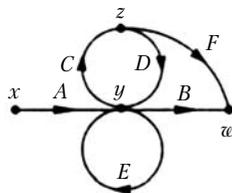


Рис. Т4.44

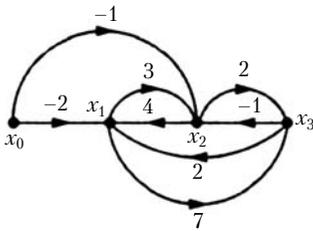


Рис. Т4.45

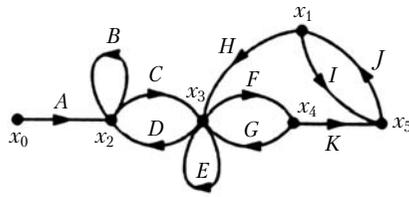


Рис. Т4.46

**4.45.** Определите передачу от истока  $x_0$  к узлу  $x_3$  графа (рис. Т4.45) методом последовательного упрощения. Составьте систему уравнений для зависимых узлов графа и с ее помощью проверьте решение.

**4.46м.** Найдите передачу от истока  $x_0$  к узлу  $x_5$  графа (рис. 4.46), пользуясь правилами преобразования сигнальных графов.

**4.47.** Определите передачу от истока  $x_0$  к узлу  $x_4$  графа (рис. Т4.47), пользуясь правилами преобразования сигнальных графов.

**4.48р.** Решите предыдущую задачу, используя формулу Мейсона.

**4.49.** Найдите число слагаемых в определителе графа (см. рис. Т4.43).

**4.50.** Определите передачу от истока  $x_0$  к узлу  $x_3$  графа (см. рис. Т4.42), используя: а) формулу Мейсона; б) метод последовательного упрощения.

**4.51.** По формуле Мейсона определите передачу от истока  $x_0$  к узлу  $x_4$  графов, приведенных на рис. Т4.48, а, б.

**4.52.** Определите сигнал в стоке графа (рис. Т4.49).

**4.53.** Используя сигнальный граф, решите систему уравнений  $5x_1 - 10x_2 + 8x_3 = 75a$ ;  $-2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ;  $0,2x_1 + 0,5x_2 - 8x_3 = -6a$ ;  $a = 1$ .

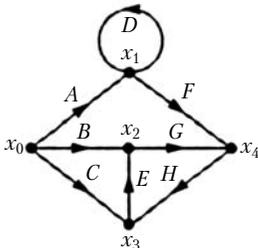
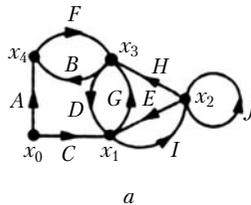
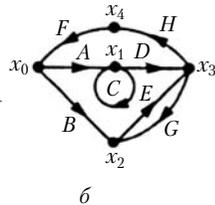


Рис. Т4.47



а



б

Рис. Т4.48

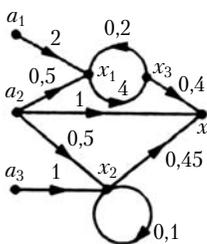


Рис. Т4.49

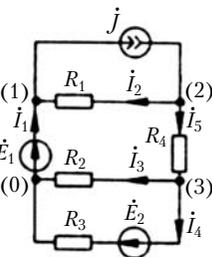


Рис. Т4.50

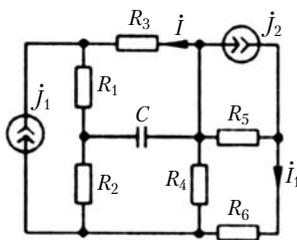


Рис. Т4.51

**4.54р.** Постройте сигнальные графы, соответствующие системам уравнений электрического равновесия цепи (рис. Т4.50), составленным методами токов ветвей, контурных токов и узловых напряжений. Источник тока в цепи управляется напряжением:  $\dot{J} = S\dot{U}_{30}$ .

**4.55.** Найдите ток  $\dot{I}_3$  цепи, рассмотренной в предыдущей задаче, преобразуя сигнальный граф контурных уравнений в конечный.

**4.56р.** Определите ток  $\dot{I}_3$  цепи, рассмотренной в задаче 4.54р, используя граф уравнений для токов ветвей и формулу Мейсона. Параметры элементов цепи:  $R_1 = R_2 = 200$  Ом;  $R_3 = R_4 = 500$  Ом;  $\dot{E}_1 = 1$  В;  $\dot{E}_2 = 2$  В;  $\dot{J} = S\dot{U}_{30}$ ;  $S = 0,1$  См.

**4.57.** Определите ток  $\dot{I}_1$  цепи (рис. Т4.51), применив: а) сигнальный граф уравнений, составленных по методу контурных токов; б) сигнальный граф уравнений, составленных по методу узловых напряжений. Параметры элементов цепи:  $R_1 = R_2 = 10$  кОм;  $R_3 = 0,2$  кОм;  $R_4 = 0,5$  кОм;  $R_5 = 1$  кОм;  $R_6 = 4$  кОм;  $C = 5$  мкФ;  $\dot{J}_1 = 10$  мкА;  $\dot{J}_2 = \beta\dot{I}$ ;  $\beta = 50$ ;  $\omega = 10^3$  рад/с.

### Решения и методические указания

**4.41м.** Преобразуем систему уравнений к причинно-следственной форме, разрешив каждое уравнение относительно одной из переменных, различных для каждого уравнения:

$$\begin{aligned} y &= \frac{D}{1-E}Z + \frac{A}{1-E}x; \\ z &= Cy; \\ w &= By + Fz. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A}{1-D}x_0; \\ x_2 &= Bx_0 + Ex_3; \\ x_3 &= Cx_0 + Hx_4; \\ x_4 &= Fx_1 + Gx_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Первой системе уравнений соответствует граф, изображенный на рис. Т4.44, второй — на рис. Т4.47.

Преобразования уравнений могут осуществляться различными способами. Например, первую систему уравнений можно представить в таком виде:

$$x = -\frac{D}{A}z + \frac{1-E}{A}y; \quad y = \frac{1}{C}z; \quad w = By + Fz.$$

Разным по форме системам уравнений соответствуют различные сигнальные графы, но все они соответствуют одной исходной системе уравнений.

**4.43р.** Искключаем промежуточный узел  $z$  (рис. Т4.52, а), объединяем параллельные ветви и петли (рис. Т4.52, б), устраним петлю (рис. Т4.52, в). Передача конечного графа  $w/x = A(B + CF)/(1 - E - CD)$ .

**4.44р.** Инвертируя ветвь с передачей  $C$ , получаем граф, приведенный на рис. Т4.53, а. Инвертируя ветвь с передачей  $B$  преобразованного графа, получаем граф, показанный на рис. Т4.53, б, который непосредственно преобразовывается в конечный (рис. Т4.53, в).

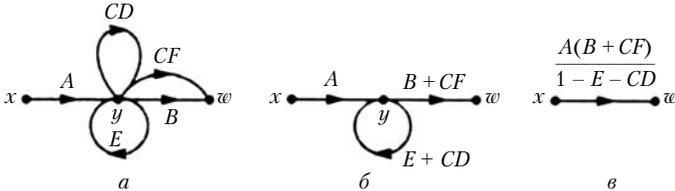


Рис. Т4.52

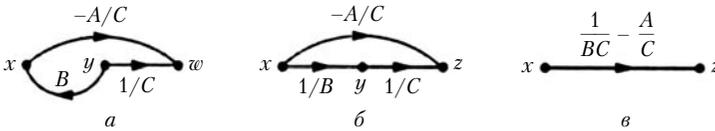


Рис. Т4.53

**4.46м.** Одним из путей решения задачи является последовательное инвертирование ветвей  $A, C, F, K$  (рис. Т4.54), исключение промежуточных узлов и определение передачи от узла  $x_5$  к узлу  $x_0$

**4.48р.** Данный граф имеет три пути от истока  $x_0$  к узлу  $x_4$  с передачами  $P_1 = AF, P_2 = BG, P_3 = CEG$  и два несоприкасающихся контура с передачами  $L_1 = D, L_2 = EGH$ . Определитель

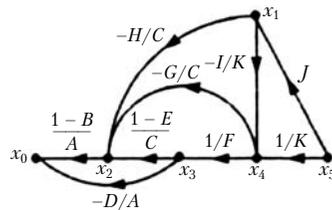


Рис. Т4.54

сигнального графа  $\Delta = 1 - \Sigma L_i + \Sigma L_i L_j = 1 - L_1 - L_2 + L_1 L_2 = 1 - D - EGH + DEGH$ . Алгебраическое дополнение первого пути  $\Delta_1 = 1$ , так как его касаются оба контура. Алгебраические дополнения второго и третьего путей  $\Delta_2 = \Delta_3 = 1 - L_1 = 1 - D$ , так как эти пути касаются только второго контура. Согласно общей формуле передача графа

$$\frac{x_4}{x_0} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^3 P_k \Delta_k = \frac{AF + (BG + CEG)(1 - D)}{1 - D - EGH + DEGH}.$$

**4.54р.** Уравнения электрического равновесия данной цепи, полученные методом токов ветвей, имеют вид

$$\begin{aligned} SR_2 \dot{I}_3 - \dot{I}_2 - \dot{I}_1 &= 0; \\ \dot{I}_2 + \dot{I}_5 - SR_2 \dot{I}_3 &= 0; \\ \dot{I}_3 + \dot{I}_4 - \dot{I}_5 &= 0; \\ -R_1 \dot{I}_2 + R_4 \dot{I}_5 + R_2 \dot{I}_3 &= \dot{E}_1; \\ R_3 \dot{I}_4 - R_2 \dot{I}_3 &= \dot{E}_2, \end{aligned}$$

где  $SR_2 \dot{I}_3 = \dot{J}$  — ток источника тока, эквивалентного заданному.

Приведем данную систему уравнений к причинно-следственной форме:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= SR_2 \dot{I}_3 - \dot{I}_2; \\ \dot{I}_2 &= -\dot{I}_5 + SR_2 \dot{I}_3; \\ \dot{I}_3 &= \dot{I}_5 - \dot{I}_4; \\ \dot{I}_4 &= \frac{R_2}{R_3} \dot{I}_3 + \frac{1}{R_3} \dot{E}_2; \\ \dot{I}_5 &= \frac{R_1}{R_4} \dot{I}_2 - \frac{R_2}{R_4} \dot{I}_3 + \frac{1}{R_4} \dot{E}_1. \end{aligned}$$

Сигнальный граф содержит пять узлов, соответствующих неизвестным токам  $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3, \dot{I}_4, \dot{I}_5$ , и два узла, соответствующие источникам ЭДС  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$  (рис. Т4.55, а).

Узловые уравнения цепи, приведенные к причинно-следственной форме, имеют такой вид:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{20} &= \frac{SR_1 R_4}{R_1 + R_4} \dot{U}_{30} + \frac{R_1}{R_1 + R_4} \dot{U}_{30} + \frac{R_4}{R_1 + R_4} \dot{E}_1; \\ \dot{U}_{30} &= -\frac{R_2 R_4}{R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4} \dot{E}_2 + \frac{R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4} \dot{U}_{20}. \end{aligned}$$

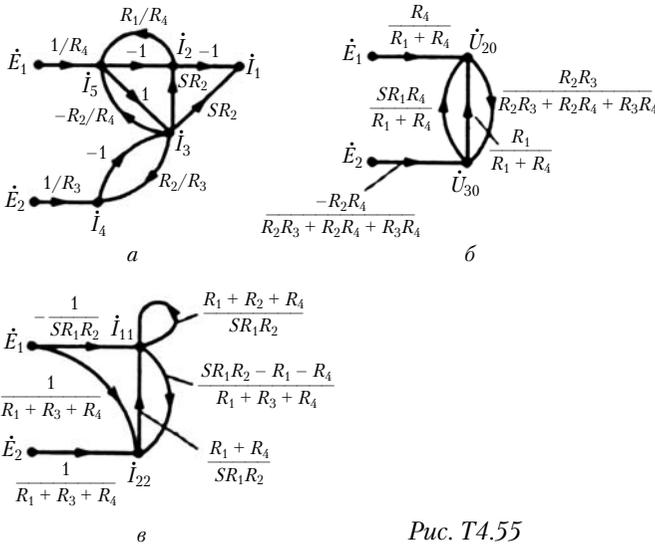


Рис. Т4.55

Сигнальный граф узловых уравнений цепи содержит два узла, соответствующих источникам ЭДС, и два узла, соответствующих неизвестным узловым напряжениям (рис. Т4.55, б).

Контурные уравнения цепи после замены источника тока, управляемого напряжением, источником напряжения, управляемым током, и приведения к причинно-следственной форме принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{11} &= -\frac{1}{SR_1R_2} \dot{E}_1 + \frac{R_1 + R_2 + R_4}{SR_1R_2} \dot{I}_{11} + \frac{R_1 + R_4}{SR_1R_2} \dot{I}_{22}; \\ \dot{I}_{22} &= \frac{1}{R_1 + R_3 + R_4} \dot{E}_1 + \frac{1}{R_1 + R_3 + R_4} \dot{E}_2 + \frac{SR_1R_2 - R_1 - R_4}{R_1 + R_3 + R_4} \dot{I}_{11}, \end{aligned}$$

где  $\dot{I}_{11} = \dot{I}_3$ ;  $\dot{I}_{22} = \dot{I}_4$ .

Сигнальный граф контурных уравнений цепи содержит два узла, соответствующих неизвестным контурным токам, и, как и в предыдущих случаях, два узла, соответствующих источникам ЭДС (рис. Т4.55, в).

**4.56р.** Используя принцип наложения и формулу Мейсона, запишем выражение для искомого тока

$$\dot{I}_3 = \dot{E}_1 \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} + \dot{E}_2 \frac{P_2 \Delta_2}{\Delta},$$

где первое слагаемое соответствует току при  $\dot{E}_2 = 0$ , а второе — при  $\dot{E}_1 = 0$ .

Граф токов ветвей (см. рис. Т4.55, *a*) имеет четыре контура с передачами  $L_1 = -R_1/R_4$ ;  $L_2 = -R_2/R_4$ ;  $L_3 = SR_2R_1/R_4$ ;  $L_4 = -R_2/R_3$ , причем только первый и четвертый контуры не соприкасаются. Определитель графа  $\Delta = 1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 + L_1L_4$ . От истока  $\dot{E}_1$  к узлу  $\dot{I}_3$  графа проходит только один путь с передачей  $P_1 = 1/R_4$ . Этот путь касается всех контуров:  $\Delta_1 = 1$ . От истока  $\dot{E}_2$  к узлу  $\dot{I}_3$  проходит также один путь с передачей  $P_2 = -1/R_3$ , который не касается одного контура:  $\Delta_2 = 1 - L_1$ . Подставив выражения для путей, алгебраических дополнений путей и определителя в исходное равенство, получим

$$\dot{I}_3 = \frac{\frac{\dot{E}_1}{R_4} - \frac{\dot{E}_2}{R_3} \left(1 + \frac{R_1}{R_4}\right)}{1 + \frac{R_1}{R_4} + \frac{R_2}{R_4} - SR_2 \frac{R_1}{R_4} + \frac{R_2}{R_3} + \frac{R_1R_2}{R_3R_4}} = 0,638 \cdot 10^{-3} \text{ A.}$$

# Глава 5

## НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЗИСТИВНЫЕ ЦЕПИ

### 5.1. Графические методы анализа нелинейных резистивных цепей

**5.1.** Найдите ток  $i$  и напряжения  $u_1, u_2$  на элементах цепи рис. Т5.1. ВАХ нелинейных резистивных элементов  $R_1$  и  $R_2$  приведены на рис. Т5.2 (кривые 1 и 2),  $E_- = 24$  В.

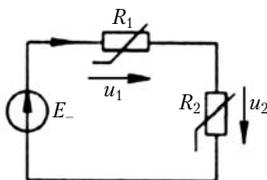


Рис. Т5.1

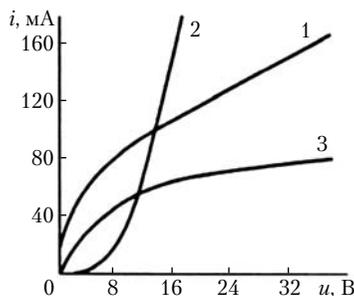


Рис. Т5.2

**5.2.** Два нелинейных резистивных элемента  $R_1$  и  $R_2$ , ВАХ которых заданы кривыми 1 и 2 на рис. Т5.2, включены параллельно источнику постоянного тока  $J_- = 100$  мА (рис. Т5.3). Найдите токи  $i_1$  и  $i_2$  через элементы и напряжение  $u$  на них.

**5.3.** Рассчитайте напряжения и токи всех элементов нелинейной цепи постоянного тока (рис. Т5.4). ВАХ нелинейных резистивных элементов заданы кривыми 1 и 2 (см. рис. Т5.2):  $E_- = 30$  В;  $R_3 = 200$  Ом.

**5.4м.** ВАХ нелинейного резистивного элемента показана на рис. Т5.2 (кривая 1). Определите параметры приближенной схемы замещения в виде последовательного соединения линейного сопротивления  $R_d$  и источника постоянного напряжения  $E_-$  (рис. Т5.5) и укажите границы ее применимости.

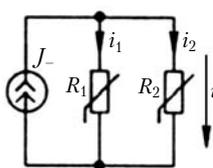


Рис. Т5.3

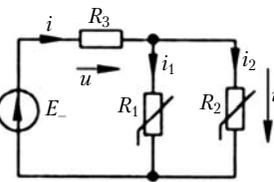


Рис. Т5.4

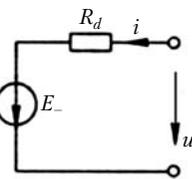


Рис. Т5.5

**5.5.** Решите задачу 5.4м, если ВАХ нелинейного резистивного элемента задана кривой 2 (см. рис. Т5.2).

**5.6.** На рис. Т5.6 показана схема простейшего стабилизатора напряжения. ВАХ нелинейного резистивного элемента задана кривой 3 (см. рис. Т5.2);  $R_2 = 200$  Ом. Определите напряжение на выходе стабилизатора, если: а)  $u_{\text{вх}} = 30$  В; б)  $u_{\text{вх}} = 36$  В.

**5.7м.** В простейшем стабилизаторе напряжения (рис. Т5.7) применен нелинейный элемент с ВАХ, показанной на рис. Т5.2 (кривая 2);  $R_1 = 337$  Ом;  $R_3 = 2,7$  кОм. Найдите напряжение на нагрузке  $u_{\text{вых}}$ , если: а)  $u_{\text{вх}} = 27$  В; б)  $u_{\text{вх}} = 30$  В.

**5.8.** Рассчитайте токи всех ветвей нелинейной цепи постоянного тока, схема которой изображена на рис. Т5.8. ВАХ нелинейного резистивного элемента задана кривой 2 (см. рис. Т5.2). Параметры элементов цепи:  $R_1 = 200$  Ом;  $R_2 = 100$  Ом;  $R_3 = 100$  Ом;  $E_- = 24$  В;  $J_- = 0,1$  А.

**5.9.** Решите задачу 5.8, изменив полярность источника тока  $J_-$ .

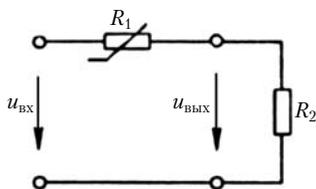


Рис. Т5.6

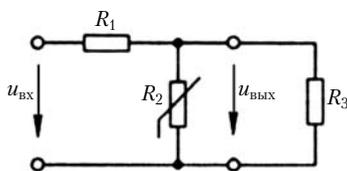


Рис. Т5.7

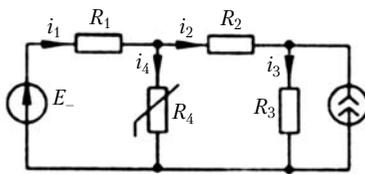


Рис. Т5.8

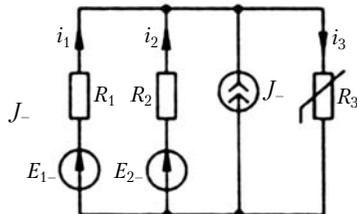


Рис. Т5.9

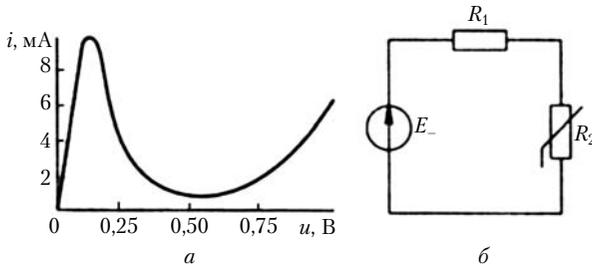


Рис. Т5.10

**5.10.** В цепи рис. Т5.9 определите токи  $i_1, i_2, i_3$ . ВАХ нелинейного резистивного элемента задана кривой 2 (см. рис. Т5.2). Параметры элементов цепи:  $R_1 = 600 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 300 \text{ Ом}$ ;  $E_{1-} = 24 \text{ В}$ ;  $E_{2-} = 9 \text{ В}$ ;  $J_- = 20 \text{ мА}$ .

**5.11м.** Нелинейный резистивный элемент, ВАХ которого показана на рис. Т5.10, а, соединен последовательно с источником ЭДС  $E_- = 1 \text{ В}$  и сопротивлением  $R_1$  (рис. Т5.10, б). Укажите области значений сопротивления  $R_1$ , в которых цепь статически: а) устойчива; б) неустойчива.

**5.12.** Для цепи (см. рис. Т5.10, б) определите такие значения  $E_-$  и  $R_1$ , при которых рабочая точка находится на падающем участке ВАХ нелинейного элемента (см. рис. Т5.10, а) с координатами:  $J_- = 6 \text{ мА}$ ;  $U_- = 0,2 \text{ В}$ . Цепь должна быть статически устойчивой.

**5.13р.** На рис. Т5.11, а показана схема усилительного каскада на биполярном транзисторе. Семейства входных и выходных характеристик транзистора приведены на рис. Т5.11, б, в. Параметры элементов цепи:  $R_H = 4 \text{ кОм}$ ;  $R_0 = 1,75 \text{ кОм}$ ;  $E_{K-} = 20 \text{ В}$ ;  $E_{0-} = 1 \text{ В}$ . Найдите токи коллектора и базы  $i_K$  и  $i_0$ .

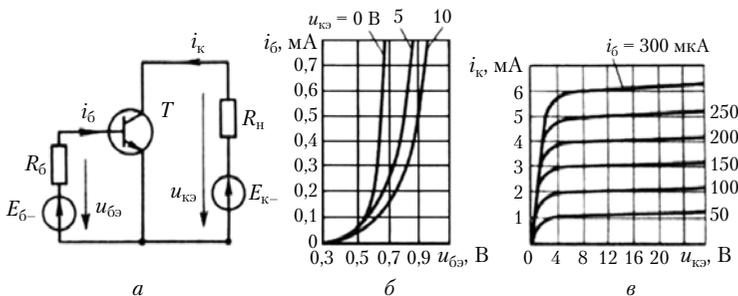


Рис. Т5.11

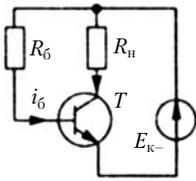


Рис. Т5.12

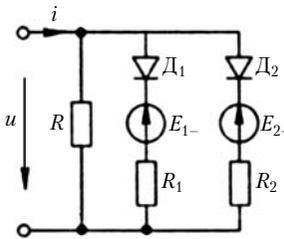


Рис. Т5.13

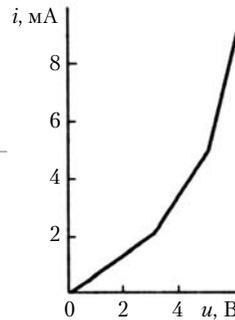


Рис. Т5.14

**5.14.** Для питания цепей базы и коллектора биполярного транзистора использован источник  $E_{к-}$  (рис. Т5.12). ВАХ транзистора приведены на рис. Т5.11, б, в. Параметры элементов цепи:  $R_{к} = 2$  кОм;  $R_{б} = 60$  кОм;  $E_{к-} = 12$  В. Найдите токи коллектора и базы  $i_{к}$  и  $i_{б}$ .

**5.15р.** Постройте зависимость входного тока  $i$  от входного напряжения  $u$  для цепи (рис. Т5.13), если  $R = 4$  кОм;  $R_1 = 1,3$  кОм;  $E_{1-} = 4$  В;  $R_2 = 1$  кОм;  $E_{2-} = 7$  В. Диоды  $D_1$  и  $D_2$  рассматривайте как идеальные (внутреннее сопротивление равно нулю в прямом направлении и бесконечности — в обратном).

**5.16.** При экспериментальном исследовании нелинейного двухполюсника (см. рис. Т5.13) получена ВАХ, показанная на рис. Т5.14. Определите параметры всех элементов. Диоды считайте идеальными.

**5.17.** Изобразите ВАХ резистивного элемента, для которого статическое сопротивление равно дифференциальному: а) в любой точке ВАХ; б) на некотором участке ВАХ; в) в одной из точек ВАХ.

### Решения и методические указания

**5.4м.** Запишите уравнение прямой, аппроксимирующей ВАХ на некотором ее участке, и сравните результат с уравнением, аппроксимирующим ВАХ эквивалентной схемы:  $i = (u + E_-)/R_d$ .

**5.7м.** Замените линейную часть цепи, состоящую из элементов  $R_1$ ,  $R_3$  и источника напряжения  $u_{вх}$ , эквивалентным источником.

**5.11м.** Об устойчивости и неустойчивости цепи судят по положению нагрузочной прямой  $i = (E_- - u)/R$  ( $u$  — напряжение на нелинейном элементе) относительно ВАХ нелинейного

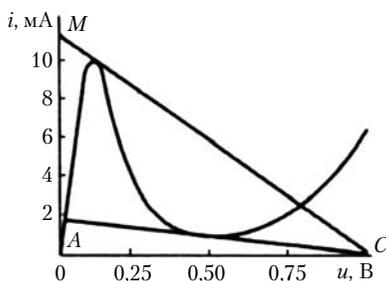


Рис. Т5.15

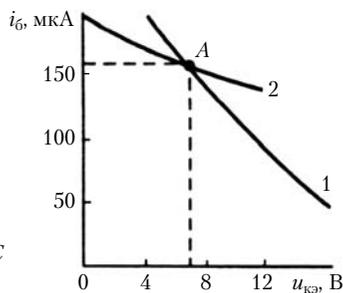


Рис. Т5.16

элемента. Неустойчивому режиму соответствуют прямые, проходящие в секторе  $АСМ$ , границы которого образуют касательные  $АС$  и  $МС$ , проведенные к ВАХ из точки  $u = E_-$  (рис. Т5.15). В пределах этого сектора, исключая границы, нагрузочная прямая пересекается с ВАХ в трех точках, и цепь статически неустойчива. Нагрузочные прямые, проходящие вне указанного сектора, пересекаются с ВАХ в одной точке, цепь имеет одну рабочую точку и, следовательно, статически устойчива.

**5.13р.** Для входной и выходной цепей транзистора составим уравнения электрического равновесия по второму закону Кирхгофа:  $R_6 i_б + u_{бэ} = E_{б-}$ ;  $R_n i_k + u_{кэ} = E_{к-}$ . Отсюда найдем уравнения нагрузочных прямых:  $i_б = (E_{б-} - u_{бэ})/R_6$ ;  $i_k = (E_{к-} - u_{кэ})/R_n$ . По точкам пересечения нагрузочных прямых с входными или выходными ВАХ (см. рис. Т5.11, б, в) строим две зависимости  $i_б = F(u_{кэ})$  (рис. Т5.16). Кривая 1 построена по выходным, а кривая 2 — по входным характеристикам транзистора. Точка пересечения кривых А определяет режим работы транзистора:  $i_б = 163$  мкА;  $u_{кэ} = 7$  В. По уравнению нагрузочной прямой  $i_k = F(u_{кэ})$  определим  $i_k = 3,3$  мА.

**5.15р.** При  $0 \leq u < 4$  В диоды  $D_1$  и  $D_2$  закрыты, и ток течет только через элемент  $R$ ;  $i = u/R$ . При  $4 \leq u < 7$  В диод  $D_1$  открыт, диод  $D_2$  закрыт. Ток протекает через две первые ветви:  $i = \frac{u}{R} + \frac{u - E_{1-}}{R_1}$ . При  $u \geq 7$  В ток протекает через все ветви:  $i = \frac{u}{R} + \frac{u - E_{1-}}{R_1} + \frac{u - E_{2-}}{R_2}$ . Результирующая ВАХ  $i = f(u)$  показана на рис. Т5.17.

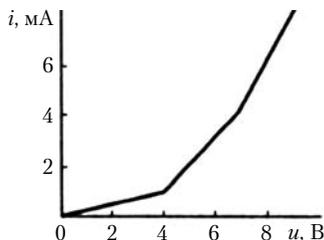


Рис. Т5.17

## 5.2. Аппроксимация характеристик нелинейных резистивных элементов

**5.18м.** ВАХ нелинейного резистивного элемента задана таблицей

$u$ , В	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$i$ , мА	0,10	0,17	0,27	0,45	0,74	1,2

Оцените возможность аппроксимации этой характеристики экспоненциальной функцией  $i = I_0 e^{au}$  и определите коэффициенты этой функции  $I_0$ ,  $a$ .

**5.19р.** Прямую ветвь ВАХ полупроводникового диода описывают экспоненциальной зависимостью тока от напряжения. При снятии характеристики диода получены следующие экспериментальные данные:

$u$ , В	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$i$ , мА	0,740	1,82	4,46	10,9	27,0

Используя метод выравнивания, аппроксимируйте характеристику экспоненциальной функцией  $i = I_0 e^{au}$ .

**5.20р.** Используя метод выбранных точек, аппроксимируйте ВАХ нелинейного резистивного элемента (рис. Т5.18) степенным полиномом  $i = a_0 + a_1(u - u_0) + a_2(u - u_0)^2$ .

**5.21.** Применяя метод выбранных точек, аппроксимируйте ВАХ нелинейного резистивного элемента (рис. Т5.19) полиномом вида  $i = a_0 + a_1u + a_2u^2$ .

**5.22р.** ВАХ нелинейного резистивного элемента  $y = y(x)$  задана таблицей

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$y_i$	0	0,060	0,230	0,500	0,850	1,18	1,65	2,30	2,90

Используя метод наименьших квадратов, аппроксимируйте характеристику выражением  $y = a_2x^2$ .

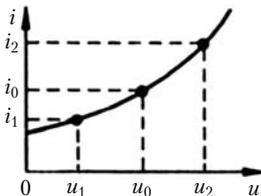


Рис. Т5.18

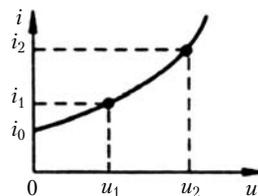


Рис. Т5.19

**5.23м.** Решите задачу 5.22р методом выравнивания.

**5.24.** Заданную в виде таблицы  $(x_i, y_i)$  ВАХ нелинейного резистивного элемента

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$y_i$	0	0,260	0,540	0,720	0,930	1,10	1,18	1,28	1,36

аппроксимируйте линейной функцией  $y = a_1x$ . Коэффициент  $a_1$  определите методом наименьших квадратов.

**5.25.** Пусть ВАХ нелинейного резистивного элемента  $y = y(x)$  в некоторой области изменения независимой переменной  $x_0 \leq x \leq x_n$  описывается линейной функцией  $y = a_1x + a_0$ . Используя метод наименьших квадратов, составьте систему уравнений для определения коэффициентов  $a_1$  и  $a_0$  по данным таблицы  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ .

**5.26.** Падающий участок ВАХ нелинейного резистивного элемента  $y = y(x)$  задан таблицей

$x_i$	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
$y_i$	9,0	6,8	4,6	3,0	2,0

Аппроксимируйте характеристику на отрезке  $[0,2; 0,4]$  линейной функцией  $y = a_1x + a_0$  методом наименьших квадратов.

**5.27.** ВАХ нелинейного резистивного элемента  $y = y(x)$  задана таблицей  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Характеристику аппроксимируют полиномом  $y = a_1x + a_2x^2$ . Используя метод наименьших квадратов, составьте уравнения для определения коэффициентов  $a_1, a_2$ .

**5.28р.** ВАХ нелинейного резистивного элемента  $y = y(x)$ , рассмотренного в задаче 5.22р, аппроксимирована параболой  $y = a_2x^2$ . Получите приближенное выражение для ВАХ в окрестности рабочей точки  $x_p = 0,6$ .

**5.29м.** ВАХ нелинейного резистивного элемента  $y = y(x)$  задана таблицей (см. условие задачи 5.22р). Используя формулы численного дифференцирования, найдите приближенное выражение для ВАХ в окрестности рабочей точки  $x_p = 0,6$ . Сравните результаты решения задач 5.28р и 5.29м.

**5.30.** ВАХ нелинейного резистивного элемента задана аналитически в виде  $i = f(u)$ . Получите выражения для статического сопротивления  $R_{ст}$  и дифференциального сопротивления  $R_{диф}$ , найдите их взаимосвязь.

**5.31.** Решите задачу 5.30 в предположении, что ВАХ задана в виде  $i = \varphi(u)$ .

**5.32.** ВАХ резистивного элемента имеет вид  $i = f(u)$ . Какой должна быть функция  $f(u)$ , чтобы удовлетворялся принцип суперпозиции [ $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$ ]?

### Решения и методические указания

**5.18м.** Для проверки возможности аппроксимации заданной ВАХ экспоненциальной функцией целесообразно использовать метод выравнивания. С этой целью нужно привести аппроксимирующую функцию к линейному виду путем преобразования функции  $\ln(i/I_0) = au$ . Значение тока  $I_0$  можно определить непосредственно по таблице исходных данных как значение тока при нулевом напряжении:  $I_0 = i|_{u=0}$ . Коэффициент  $a$  можно найти после линеаризации графика  $\ln(i/I_0) = au$ .

**5.19р.** В данном случае в отличие от предыдущей задачи не задано значение тока при нулевом напряжении, поэтому ток  $I_0$  определяют не по таблице, а путем графического построения. Составим вспомогательную таблицу:

$u, \text{В}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\ln i/1 \text{ мА}$	-0,301	0,599	1,50	2,39	3,26

По таблице строим график  $\ln \frac{i}{1 \text{ мА}} = f(u)$  (рис. Т5.20).

Полученная зависимость хорошо аппроксимируется прямой, уравнение которой  $\ln(i/1 \text{ мА}) = 9(u - 0,133)$ . Кроме того, по условию,  $\ln(i/1 \text{ мА}) = \ln(I_0/1 \text{ мА}) + au$ . Сопоставив эти результаты, получим  $\ln(I_0/1 \text{ мА}) = -1,2$ ;  $I_0 = 0,3 \text{ мА}$ ;  $a = 9 \text{ В}^{-1}$ . Таким образом,  $i = 0,36e^{9u} \text{ мА}$ .

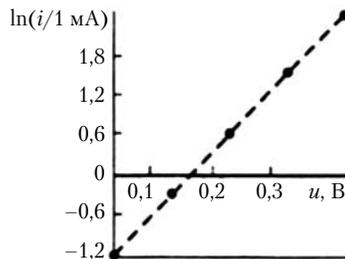


Рис. Т5.20

**5.20р.** Аппроксимированная ВАХ должна совпадать с заданной в выбранных точках  $(u_1, i_1)$ ,  $(u_0, i_0)$  и  $(u_2, i_2)$ . При этом получим следующую систему уравнений:

$$i_0 = a_0 + a_1(u_0 - u_0) + a_2(u_0 - u_0)^2;$$

$$i_1 = a_0 + a_1(u_1 - u_0) + a_2(u_1 - u_0)^2;$$

$$i_2 = a_0 + a_1(u_2 - u_0) + a_2(u_2 - u_0)^2,$$

из которой найдем искомые коэффициенты:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= i_0; \\
 a_1 &= \{i_0[(u_1 - u_0)^2 - (u_2 - u_0)^2] + i_1(u_2 - u_0)^2 - i_2(u_1 - u_0)^2\}/D; \\
 a_2 &= [i_0(u_2 - u_1) - i_1(u_2 - u_0) - i_2(u_0 - u_1)]/D; \\
 D &= -(u_2 - u_0)(u_0 - u_1)(u_2 - u_1).
 \end{aligned}$$

**5.22р.** Сумма квадратов отклонений аппроксимирующей функции от заданной  $\xi = \sum_{i=0}^m (a_2 x_i^2 - y_i)^2$  минимальна при значении коэффициента  $a_2$ , удовлетворяющего уравнению  $\frac{\partial \xi}{\partial a_2} = 2 \sum_{i=0}^m (a_2 x_i^2 - y_i) x_i^2 = 0$ , откуда

$$a_2 = \frac{\sum_{i=0}^m x_i^2 y_i}{\sum_{i=0}^m x_i^4} = 4,63.$$

**5.23м.** Постройте график  $\sqrt{y_i} = F(x_i)$  и аппроксимируйте его прямой  $\sqrt{y} = a_1 x$ . По найденному значению  $a_1 = \sqrt{a_2}$  легко определить  $a_2$ .

**5.28р.** Разложение функции  $y = a_2 x^2$  в ряд Тейлора в окрестности  $\Delta x$  рабочей точки  $x_p$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 y &= y(x_p) + \frac{1}{1!} y'(x_p)(\Delta x) + \frac{1}{2!} y''(x_p)(\Delta x)^2 = \\
 &= a_2 x_p^2 + \frac{1}{1!} 2a_2 x_p(\Delta x) + \frac{1}{2!} 2a_2(\Delta x)^2.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что  $a_2 = 4,63$  (см. решение задачи 5.22р) и  $x_p = 0,6$ , получаем  $y = 1,67 + 5,56(\Delta x) + 4,63(\Delta x)^2$ .

**5.29м.** При разложении функции в ряд Тейлора (см. решение задачи 5.28р) примените для производных конечно-разностные аппроксимации второго порядка:

$$y'(x_i) = (y_{i+1} - y_{i-1})/(2h); \quad y''(x_i) = (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})/h^2,$$

где  $h = x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$ ;  $y_n = y(x_n)$ . В нашем случае  $x_i = x_p = 0,6$ ;  $y_i = y(x_p) = 1,65$ ;  $x_{i-1} = 0,5$  и т.д.

### 5.3. Нелинейные резистивные элементы при гармоническом внешнем воздействии

**5.33р.** К нелинейному резистивному элементу, ВАХ которого приведена на рис. Т5.10,  $a$ , приложено напряжение  $u(t) = 0,25 + 0,2\cos 2\pi 10^3 t$  В. Используя графические методы, определите зависимость тока через элемент от времени.

**5.34м.** Ток через нелинейный резистивный элемент с ВАХ  $u = 2 \cdot 10^4 i - 4 \cdot 10^8 i^3 + 2,5 \cdot 10^{12} i^5$  В равен  $i = I_m \cos 10^5 t$  А. Определите амплитуды всех гармоник напряжения на элементе до третьей включительно для  $I_m = 6 \cdot 10^{-3}$  А.

**5.35м.** По данным задачи 5.34м определите, в каком диапазоне амплитуд тока дифференциальное сопротивление элемента можно с точностью до  $\pm 5\%$  считать независящим от тока.

**5.36р.** Постройте ВАХ безынерционного нелинейного резистивного элемента  $y = y(x)$ , если воздействие  $x(t) = \sin \pi t/4$  и реакция  $y(t)$  заданы графиками, представленными на рис. Т5.21, а, б.

**5.37м.** Решите задачу 5.36р, если воздействие  $x(t)$  и реакция  $y(t)$  заданы графиками, изображенными на рис. Т5.22, а, б.

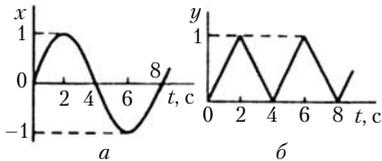


Рис. Т5.21

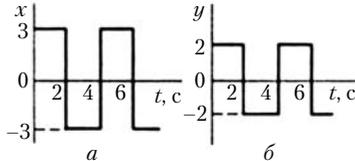


Рис. Т5.22

**5.38.** ВАХ нелинейного резистивного элемента описывается выражением  $i = a_2 u^2$ . Покажите, что гармоническое напряжение  $u = U_m \cos \omega t$ , приложенное к элементу, вызывает в нем негармонический ток.

**5.39.** ВАХ нелинейного резистивного элемента аппроксимирована полиномом  $i = a_0 + a_1 u + a_3 u^3$ . Найдите частоты всех составляющих тока, если к элементу приложено напряжение: а)  $u = U_m \cos \omega_0 t$ ; б)  $u = u_0 + U_m \cos \omega_0 t$ .

**5.40.** Решите задачу 5.39 для случая, когда ВАХ аппроксимирована полиномом  $i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_4 u^4$ .

**5.41.** К нелинейному резистивному элементу, ВАХ которого описывается полиномом  $i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3$ , приложено напряжение  $u = U_m \cos \omega t$ . При каком условии постоянная составляющая тока через элемент не зависит от амплитуды приложенного к нему напряжения?

**5.42м.** К нелинейному резистивному элементу, ВАХ которого определяется функцией  $i = 0,2(e^{8u} - 1)$  мА, приложено напряжение  $u = 0,5 + 0,05 \cos 10^4 t$  В. Найдите амплитуды первых трех гармонических составляющих тока через элемент.

**5.43.** ВАХ нелинейного резистивного элемента аппроксимирована полиномом  $i = 50 + 4u + 1,5u^2$  мА. К элементу

приложено напряжение  $u = 4 + U_m \cos 10^4 t$  В. Найдите зависимость амплитуды первой гармоники тока  $I_{m1}$  от амплитуды переменной составляющей напряжения  $U_m$ .

**5.44.** К нелинейному резистивному элементу, ВАХ которого аппроксимирована полиномом  $i = 20 + 2u + 0,5u^2 - 0,04u^3$  мА, приложено напряжение  $u = 2 + U_m \cos 10^5 t$  В. Определите зависимость амплитуды первой гармоники тока  $I_{m1}$  от амплитуды переменной составляющей напряжения  $U_m$ .

**5.45.** На нелинейный резистивный элемент с ВАХ  $i = 30 + 5u + 2u^2$  мА действует напряжение  $u = u_0 + U_m \cos 10^5 t$  В. Определите зависимость амплитуды первой гармоники тока  $I_{m1}$  от напряжения смещения  $u_0$  при фиксированной амплитуде переменной составляющей напряжения  $U_m = 3$  В.

**5.46.** Для цепи рис. Т5.23 ВАХ нелинейного резистивного элемента описывается выражением  $i = 2 + 4u + 5u^2$  мА. ЭДС источников напряжения, действующих в цепи, заданы:  $e(t) = 2 \cos 2\pi 10^3 t$  В;  $E_- = 2$  В = const. Вычислите амплитуды гармонических составляющих тока  $i$ .

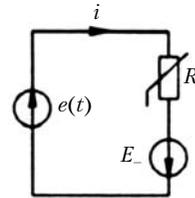


Рис. Т5.23

**5.47р.** К нелинейному резистивному элементу приложено гармоническое напряжение  $u(t) = 3 \cos 2\pi 10^3 t$  В. Какой должна быть ВАХ этого элемента, чтобы через него протекал гармонический ток  $i(t) = 18 \cos 4\pi 10^3 t$  мА?

**5.48.** Найдите аналитическое выражение для ВАХ нелинейного резистивного элемента, который обеспечивает преобразование синусоидального воздействия  $x(t)$  в бесконечную последовательность треугольных импульсов (см. задачу 5.36р).

**5.49.** К нелинейному резистивному элементу, ВАХ которого аппроксимирована полиномом второй степени  $i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$ , приложено напряжение  $u = \sum_{k=1}^2 U_{mk} \cos \omega_k t$ . Найдите амплитуды гармонических составляющих тока.

### Решения и методические указания

**5.33р.** Графические построения, необходимые для получения кривой  $i(t)$ , приведены на рис. Т5.24,  $a - z$ . Обратите внимание на необходимость согласования масштабов графиков по переменным  $u, i, t$ .

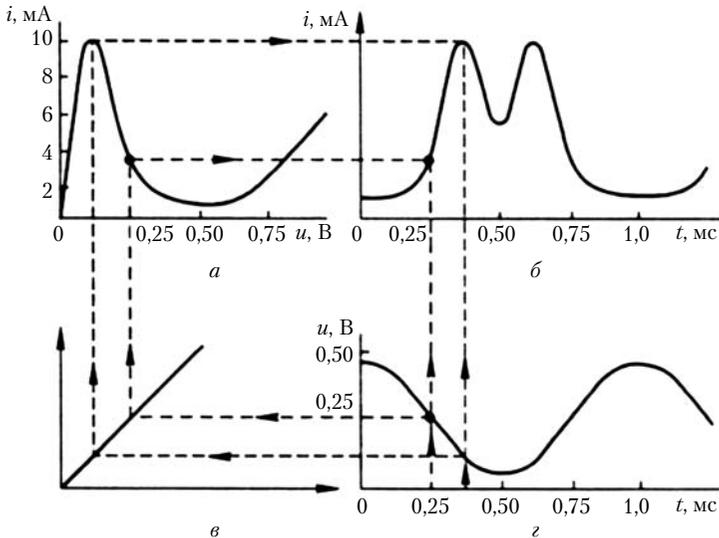


Рис. Т5.24

**5.34м.** Используйте формулы (5.22)–(5.25) и учтите, что ВАХ описывается нечетным полиномом, поэтому четные гармоники напряжения отсутствуют.

**5.35м.** Для ВАХ  $u = a_1 i + a_3 i^3 + a_5 i^5$  дифференциальное сопротивление  $R_{\text{диф}} = du/di = a_1 + 3a_3 i^2 + 5a_5 i^4$ . Отсюда можно найти, при каких значениях тока отклонение  $R_{\text{диф}}$  от уровня  $R_0 = a_1$  в большую или меньшую сторону не превышает 5%.

**5.36р.** Построение характеристики  $y(x)$  показано на рис. Т5.25, а – з. Обратите внимание на необходимость согласования масштабов графиков по переменным  $x, y, t$ .

**5.37м.** Задача решается аналогично задаче 5.36р.

**5.42м.** Разложите функцию  $i(u)$  в ряд Тейлора в окрестностях рабочей точки  $u_0 = 0,5$  В и, ограничиваясь первыми тремя членами, получите полином второго порядка, который аппроксимирует ВАХ при  $u \approx u_0$ .

**5.47р.** Гармоническое напряжение  $u(t) = U_m \cos \omega t$ , приложенное к нелинейному резистивному элементу с ВАХ  $i = \sum_{k=0}^n a_k u^k$ , вызывает в нем ток  $i = I_- + \sum_{k=1}^n I_{mk} \cos k\omega t$ . По условию задачи  $I_- = 0, I_{mk} = 0$  ( $k = 1, 3, 4, \dots, n$ ), а  $I_{m2}$  задана. Выразим амплитуды гармонических составляющих тока через коэффициенты  $a_k$  и амплитуду напряжения  $U_m$  и решим по-

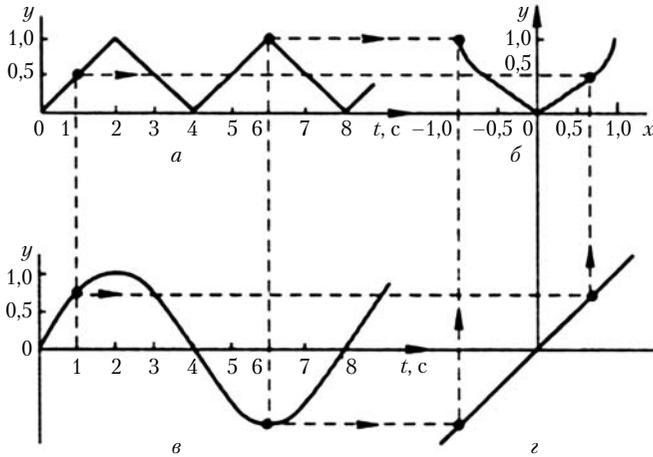


Рис. Т5.25

лученную систему уравнений относительно коэффициентов  $a_k$ :

$$I = a_0 + \frac{1}{2}a_2U_m^2 + \frac{3}{8}a_4U_m^4 + \frac{5}{16}a_6U_m^6 + \dots = 0;$$

$$I_{m1} = a_1U_m + \frac{3}{4}a_3U_m^3 + \frac{5}{8}a_5U_m^5 + \dots = 0;$$

$$I_{m2} = \frac{1}{2}a_2U_m^2 + \frac{1}{2}a_4U_m^4 + \frac{15}{32}a_6U_m^6 + \dots = I_{m2};$$

$$I_{mn} = \frac{1}{2^{n-1}}a_nU_m^n = 0.$$

Решение этой системы уравнений при высоких степенях  $n$  полинома, описывающего ВАХ, затруднительно. Поэтому ограничимся рассмотрением простейшего случая квадратичной ВАХ ( $n = 2$ ):  $i = a_0 + a_1u + a_2u^2$ . В результате получим  $a_0 + 0,5a_2U_m^2 = 0$ ;  $a_1 = 0$ ;  $a_2 = 2I_{m2}/U_m^2$ , откуда  $a_0 = -I_{m2}$ . Требуемая ВАХ имеет вид  $i = -I_{m2} + 2I_{m2}u^2/U_m^2$ . При  $U_m = 3$  В,  $I_{m2} = 18$  мА, имеем  $i = -18 + 4u^2$  мА.

# Глава 6

## МЕТОДЫ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 6.1. Классический метод анализа переходных процессов

**6.1р.** Составьте дифференциальные уравнения цепей рис. Т6.1, *а* и *б* для определения: а) напряжения  $u$ ; б) тока  $i_L$ .

**6.2.** Составьте дифференциальное уравнение цепи (рис. Т6.2) относительно напряжения  $u$ .

**6.3.** Составьте дифференциальное уравнение цепи (рис. Т6.3) относительно тока  $i_L$ .

**6.4.** Составьте дифференциальное уравнение цепи (рис. Т6.4) относительно напряжения  $u$ .

**6.5.** Составьте дифференциальное уравнение цепи (рис. Т6.5) относительно тока  $i_L$ .

**6.6м.** Для цепи (рис. Т6.6) составьте систему дифференциальных уравнений относительно напряжений  $u_1$  и  $u_2$ .

**6.7.** Для цепей (рис. Т6.7, *а*, *б*) составьте дифференциальные уравнения относительно напряжения  $u$ .

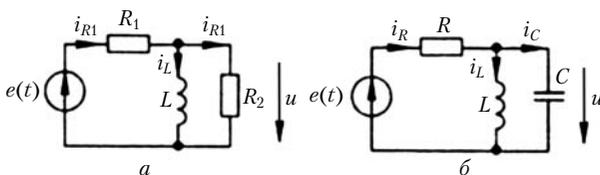


Рис. Т6.1

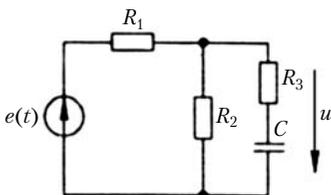


Рис. Т6.2

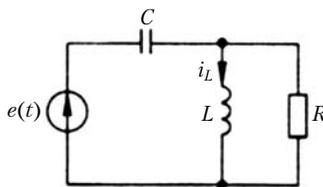


Рис. Т6.3

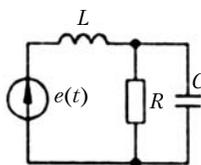


Рис. Т6.4

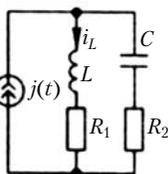


Рис. Т6.5

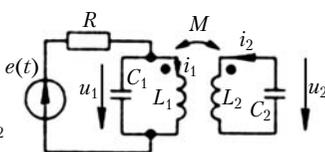
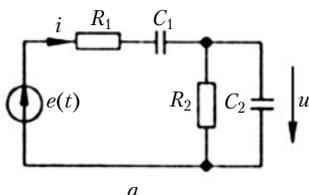
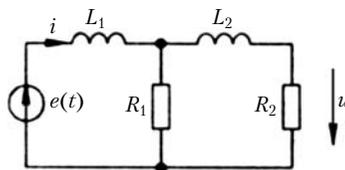


Рис. Т6.6



а



б

Рис. Т6.7

**6.8.** Определите порядок  $\nu$  цепей (рис. Т6.8, а – з).

**6.9р.** К  $RC$ -цепи, находившейся в установившемся режиме под действием постоянной ЭДС  $E_-$ , в момент времени  $t = 0$  подключают емкость  $C_2$ , предварительно заряженную до напряжения  $U_0$  (рис. Т6.9). Найдите напряжения  $u_{C1}$  и  $u_{C2}$  в моменты времени  $t = 0_-$ ;  $t = 0_+$ .

**6.10м.** Для цепи (рис. Т6.10) найдите напряжения  $u_{C1}$ ,  $u_{C2}$  в моменты времени  $t = 0_-$ ;  $t = 0_+$ . Емкость  $C_2$  до коммутации заряжена не была.

**6.11м.** Две  $RC$ -цепи, находившиеся в установившемся режиме под действием постоянных ЭДС  $E_{1-}$  и  $E_{2-}$ , в момент времени  $t = 0$  соединяются между собой (рис. Т6.11). Найдите напряжения  $u_{C1}$  и  $u_{C2}$  в моменты времени  $t = 0_-$ ,  $t = 0_+$  и  $t \rightarrow \infty$ .

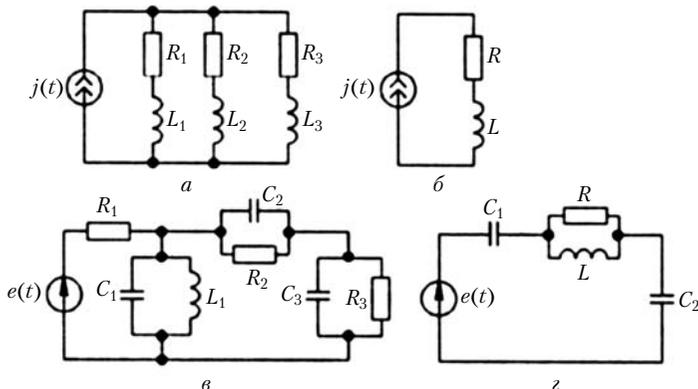


Рис. Т6.8

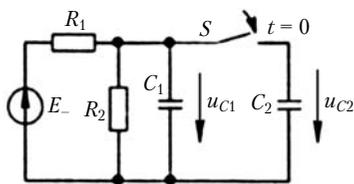


Рис. T6.9

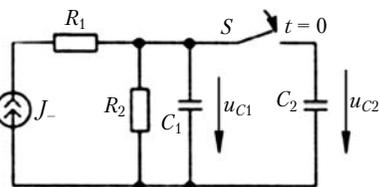


Рис. T6.10

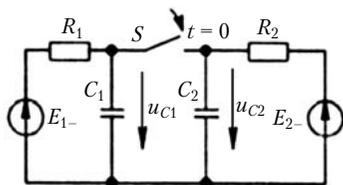


Рис. T6.11

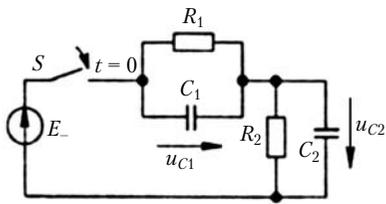


Рис. T6.12

**6.12м.** Двухзвенную  $RC$ -цепь без начального запаса энергии в момент времени  $t = 0$  подключают к источнику постоянной ЭДС  $E_-$  (рис. T6.12). Определите напряжения  $u_{C1}$  и  $u_{C2}$  в моменты времени  $t = 0_-$ ,  $t = 0_+$  и  $t \rightarrow \infty$ .

**6.13р.**  $RL$ -цепь (рис. T6.13) находится в установившемся режиме под действием постоянной ЭДС  $E_-$ . В момент времени  $t = 0$  ключ  $S$  размыкается. Считая все параметры цепи известными, найдите токи  $i_1$  и  $i_2$  через индуктивности в моменты времени  $t = 0_-$ ,  $t = 0_+$ . Найдите значения тех же токов для случая, когда в исходном состоянии ключ  $S$  разомкнут.

**6.14.** В момент времени  $t = 0$   $RL$ -цепь отключают от источника постоянной ЭДС  $E_-$  (рис. T6.14). Вычислите токи  $i_1$  и  $i_2$  для  $t = 0_-$ ,  $t = 0_+$ .

**6.15м.** В  $RL$ -цепи (рис. T6.15) ключ размыкается в момент времени  $t = 0$ . Полагая известными параметры цепи, найдите токи  $i_1$  и  $i_2$  в моменты времени  $t = 0_-$ ,  $t = 0_+$ .

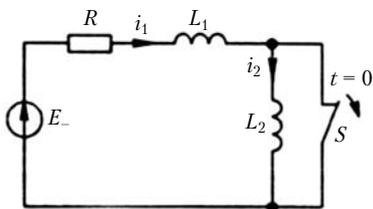


Рис. T6.13

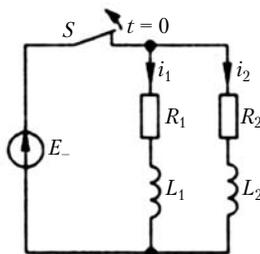


Рис. T6.14

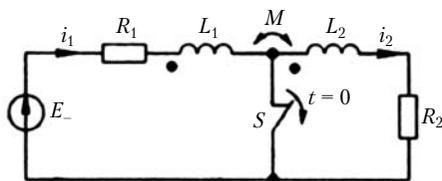


Рис. Т6.15

**6.16р.** Напряжение  $u$  на входе последовательной  $RC$ -цепи изменяется по закону

$$u = \begin{cases} E_1 = 5 \text{ В} & \text{при } t < 0, \\ E_2 = 10 \text{ В} & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Определите законы изменения тока  $i$  и напряжения  $u_C$  при  $R = 5 \text{ кОм}$ ;  $C = 200 \text{ пФ}$ .

**6.17.** Используя данные задачи 6.16р, определите закон изменения напряжения на емкости  $u_C$  в том случае, когда напряжение на входе цепи после коммутации равно нулю.

**6.18.** Емкость  $C$ , предварительно заряженную до напряжения  $U_0$ , подключают в момент времени  $t = 0$  к сопротивлению  $R$ . Найдите момент времени  $t_1$ , соответствующий уменьшению напряжения на емкости в  $N$  раз.

**6.19.** По данным задачи 6.18 определите среднюю на интервале времени  $[0, t_1]$  мощность, рассеиваемую в сопротивлении  $R$ .

**6.20.** Конденсатор емкостью  $C = 0,5 \text{ мкФ}$ , предварительно заряженный до напряжения  $U_0 = 100 \text{ В}$ , отключают от источника. Через  $t = 30 \text{ мин}$  после этого напряжение на нем уменьшилось в 10 раз. Используя простейшую параллельную схему замещения конденсатора, найдите сопротивление утечки (изоляция)  $R_y$ .

**6.21р.** На вход последовательной  $RL$ -цепи с нулевыми начальными условиями в момент времени  $t = 0$  подают одиночный прямоугольный импульс напряжения  $E = 5 \text{ В}$  длительностью  $t_u$ . Параметры элементов цепи:  $R = 2 \text{ кОм}$ ;  $L = 40 \text{ мГн}$ . Найдите ток  $i$  цепи и напряжение на индуктивности  $u_L$  при различных значениях длительности импульса  $t_u$ : а) 5 мкс; б) 80 мкс.

**6.22м.** Последовательную  $RL$ -цепь с нулевыми начальными условиями в момент времени  $t = 0$  подключают к источнику постоянной ЭДС  $E = 10 \text{ В}$ . Определите по графику тока цепи  $i(t)$  (рис. Т6.16) параметры элементов  $R$  и  $L$ .

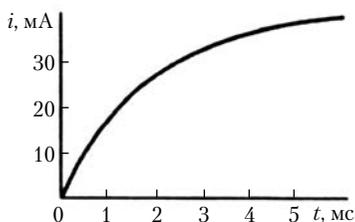


Рис. Т6.16

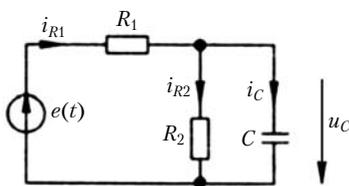


Рис. Т6.17

**6.23.** Для цепи рис. Т6.17 определите значения  $i_{R1}$ ,  $i_{R2}$  и  $u_C$ ,  $i_C$  для трех моментов времени:  $t = 0_-$ ;  $t = 0_+$ ;  $t \rightarrow \infty$ . При этом

$$e(t) = \begin{cases} 10 \text{ В} & \text{при } t < 0, \\ 20 \text{ В} & \text{при } t \geq 0; \end{cases} R_1 = 5 \text{ кОм}; R_2 = 15 \text{ кОм}; C = 2 \text{ мФ}.$$

**6.24.** Для цепи (рис. Т6.18) найдите значения  $i_L$ ,  $i_R$  и  $u_R$  для трех моментов времени:  $t = 0_-$ ;  $t = 0_+$ ;  $t \rightarrow \infty$ . Параметры элементов цепи:  $R = 3 \text{ кОм}$ ;  $L = 2 \text{ Гн}$ ,

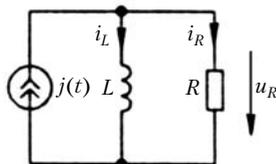


Рис. Т6.18

$$j(t) = \begin{cases} 3 \text{ мА} & \text{при } t < 0, \\ 1 \text{ мА} & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

**6.25р.** Определите характер свободных процессов в последовательной  $RLC$ -цепи, составленной из элементов со следующими параметрами:  $R = 15 \text{ Ом}$ ;  $L = 20 \text{ мГн}$ ;  $C = 5000 \text{ пФ}$ . Внутреннее сопротивление источника напряжения  $R = 5 \text{ Ом}$ .

**6.26.** Рассчитайте частоту  $\omega_{\text{св}}$  и логарифмический декремент  $\theta$  свободных колебаний для последовательного колебательного контура, рассмотренного в задаче 6.25р.

**6.27р.** Последовательный колебательный  $RLC$ -контур с нулевыми начальными условиями в момент времени  $t = 0$  подключают к источнику постоянной ЭДС  $E_-$ . Предложите способы приближенного определения добротности контура  $Q$  по графику тока контура  $i(t)$ .

**6.28.**  $RLC$ -контур (см. задачу 6.27р) имеет добротность  $Q = 100$ . Через сколько периодов свободных колебаний огибающая тока контура снизится до уровня: а) 50%; б) 20%; в) 10%; г) 5% от своего максимального значения?

**6.29м.** Последовательный  $RLC$ -контур с нулевыми начальными условиями в момент времени  $t = 0$  подключают к источнику постоянной ЭДС  $E_- = 10 \text{ В}$ . Определите по графику тока контура  $i(t)$  (рис. Т6.19) параметры  $R$ ,  $L$  и  $C$ .

**6.30р.** В момент времени  $t = 0$  к входу последовательной  $RL$ -цепи подключают источник гармонической ЭДС  $e = \sqrt{2} \cdot 50 \cos 10^6 t$  В. Определите ток цепи  $i$  при  $L = 40$  мГн;  $R = 8$  кОм.

**6.31.** Найдите напряжение  $u(t)$  на выходе цепи (см. рис. Т6.7, а), считая, что ЭДС  $e(t)$  изменяется во времени по закону

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ E = 5 \text{ В} & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Параметры элементов цепи:  $R_1 = 2$  кОм;  $R_2 = 1$  кОм;  $C_1 = 2$  мкФ;  $C_2 = 1$  мкФ.

**6.32.** Найдите напряжение  $u(t)$  на выходе цепи (см. рис. Т6.7, б), принимая, что ЭДС  $e(t)$  изменяется во времени по закону

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ E = 2 \text{ В} & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Параметры элементов цепи:  $R_1 = 1$  кОм;  $R_2 = 2$  кОм;  $L_1 = 1$  Гн;  $L_2 = 2$  Гн.

**6.33р.** На вход последовательной  $RC$ -цепи с нулевыми начальными условиями в момент времени  $t = 0$  подают бесконечную периодическую последовательность положительных прямоугольных импульсов напряжения высотой  $E$ , длительностью  $t_{\text{н}}$  и периодом повторения  $T$ . Считая  $E = 1$  В;  $RC = \tau = 1$ , найдите напряжение на емкости  $u_C(t)$  и различных значениях  $t_{\text{н}}$  и  $T$ : а)  $t_{\text{н}} = 1$  мс;  $T = 6$  мс; б)  $t_{\text{н}} = 5$  мс;  $T = 6$  мс; в)  $t_{\text{н}} = 0,2$  мс;  $T = 0,6$  мс.

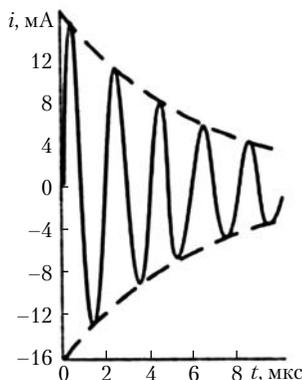


Рис. Т6.19

### Решения и методические указания

**6.1р.** Вывод дифференциальных уравнений в задачах 6.1–6.7 осуществляют в два этапа. Сначала составляют уравнения электрического равновесия относительно неизвестных токов и напряжений, затем из полученной системы уравнений исключают все неизвестные, кроме одной переменной, указанной в условиях задачи.

Рассмотрим цепь (см. рис. Т6.1, а). Для этой цепи  $i_{R1} = i_L + i_{R2}$ ;  $e = u_{R1} + u$ .

Выразим напряжения и токи через заданную переменную — напряжение  $u$ :  $i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt$ ;  $i_{R2} = u/R_2$ . Отсюда  $u_{R1} = R$ .

Подставим этот результат во второе уравнение электрического равновесия:

$$e = \frac{R_1}{L} \int_{-\infty}^t u dt + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) u.$$

Чтобы избавиться от интеграла в правой части последнего уравнения, осуществим дифференцирование обеих частей уравнения по времени. После простых преобразований получим

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{de}{dt},$$

где  $\tau = L(R_1 + R_2)(R_1 R_2)^{-1}$ .

Выразим напряжения и токи через ток  $i_L$ :

$$u = u_{R2} = u_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad i_{R2} = u_{R2} R_2^{-1} = L R_2^{-1} \frac{di_L}{dt};$$

$$i_{R1} = i_L + L R_2^{-1} \frac{di_L}{dt};$$

$$u_{R1} = R_1 i_{R1} = R_1 i_L + R_1 L R_2^{-1} \frac{di_L}{dt}.$$

Подставив эти выражения в уравнение баланса напряжений  $u_{R1} + u = e$ , после простых преобразований получим

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{\tau} i_L = R_2 [L(R_1 + R_2)]^{-1} e.$$

Теперь рассмотрим цепь, схема которой приведена на рис. Г6.1, б. Для этой цепи  $i_R = i_L + i_C$ ;  $e = u_R + u$ .

Выразим напряжения и токи через заданную переменную — напряжение  $u$ :  $i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt$ ;  $i_C = C \frac{du}{dt}$ . Отсюда

$$i_R = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt + C \frac{du}{dt}; \quad u_R = R i_R.$$

С учетом этих выражений уравнение баланса напряжений примет вид

$$\frac{R}{L} \int_{-\infty}^t u dt + RC \frac{du}{dt} + u = e.$$

После дифференцирования правой и левой частей этого уравнения получаем дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи относительно напряжения  $u$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = \frac{1}{RC} \frac{de}{dt}.$$

Выразим напряжение и токи через ток  $i_L$ :

$$u = L \frac{di_L}{dt}; \quad i_C = C \frac{du}{dt} = LC \frac{d^2i_L}{dt^2}; \quad i_R = i_L + LC \frac{d^2i_L}{dt^2};$$

$$u_R = Ri_R = Ri_L + RLC \frac{d^2i_L}{dt^2}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение баланса напряжения, получаем дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи относительно тока индуктивности

$$\frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{RLC} e.$$

**6.6м.** Сначала следует выразить токи  $i_1$  и  $i_2$  через напряжения  $u_1$  и  $u_2$  с помощью компонентных уравнений связанных индуктивностей

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \quad u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}.$$

Проинтегрировав эти уравнения, получим

$$L_1 e_1 + M i_2 = \int_{-\infty}^t u_1 dt; \quad M i_1 + L_2 i_2 = \int_{-\infty}^t u_2 dt,$$

откуда

$$i_1 = \left( L_2 \int_{-\infty}^t u_1 dt - M \int_{-\infty}^t u_2 dt \right) D; \quad i_2 = \left( L_1 \int_{-\infty}^t u_2 dt - M \int_{-\infty}^t u_1 dt \right) D;$$

$$D = (L_1 L_2 - M^2)^{-1}.$$

**6.9р.** Для момента времени  $t = 0_-$ , непосредственно предшествующего коммутации, согласно условию задачи  $u_{C2}(0_-) = U_0$  и  $u_{C1}(0_-) = (E - R_2)/(R_1 + R_2)$ . Последнее выражение получают в результате расчета простейшего делителя напряжения, состоящего из элементов  $E_-$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ .

Поскольку в данном случае напряжения емкостей  $C_1$  и  $C_2$  непосредственно перед коммутацией имеют различные значения  $u_{C1}(0_-) \neq u_{C2}(0_-)$ , а после коммутации  $C_1$  и  $C_2$  оказываются включенными параллельно, выполнение вто-

рого закона коммутации приведет к результатам, противоречащим второму закону Кирхгофа. Следовательно, данная коммутация является некорректной, второй закон коммутации не выполняется.

Для решения задачи нужно использовать принцип непрерывности во времени суммарного заряда. Так как у линейных емкостей заряд емкости  $q$  связан с напряжением соотношением  $q = Cu$ , поэтому можно записать  $C_1 u_{C1}(0_-) + C_2 u_{C2}(0_-) = C_1 u_{C1}(0_+) + C_2 u_{C2}(0_+)$ .

В момент коммутации напряжения на параллельно включенных емкостях скачком принимают одинаковые значения,  $u_{C1}(0_+) = u_{C2}(0_+) = u_C(0_+)$ , поэтому  $u_C(0_+) = [C_1 u_{C1}(0_-) + C_2 u_{C2}(0_-)](C_1 + C_2)^{-1}$ . Подставляя в это выражение ранее найденные значения напряжений для  $t = 0_-$ , получаем

$$u_{C1}(0_+) = u_{C2}(0_+) = \frac{1}{C_1 + C_2} \left[ \frac{E_- R_2 C_1}{R_1 + R_2} + C_2 U_0 \right].$$

**6.10м.** Задача решается аналогично предыдущей. Различие состоит лишь в значениях напряжений  $u_{C1}(0_-)$  и  $u_{C2}(0_-)$ .

**6.11м.** Напряжения  $u_{C1}(0_-)$ ,  $u_{C2}(0_-)$  и  $u_{C1}(\infty)$  определяются в результате расчета цепей постоянного тока. Напряжения  $u_{C1}(0_+)$  и  $u_{C2}(0_+)$  находят в соответствии с принципом непрерывности во времени суммарного заряда цепи (см. задачу 6.9р).

**6.12м.** Напряжения  $u_{C1}(\infty)$  и  $u_{C2}(\infty)$  определяют в результате расчета простейшей цепи постоянного тока, состоящей из элементов  $E_-$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ . Цепь не содержит начального запаса энергии, поэтому легко найти  $u_{C1}(0_-)$  и  $u_{C2}(0_-)$ . Для расчета напряжений  $u_{C1}(0_+)$  и  $u_{C2}(0_+)$  нужно использовать уравнение баланса напряжений  $u_{C1}(0_+) + u_{C2}(0_+) = E_-$  и принцип непрерывности суммарного заряда.

**6.13р.** До коммутации ток  $i_1$  замыкается через индуктивность  $L_1$  и ключ, минуя индуктивность  $L_2$ :  $i_1(0_-) = i_R(0_-) = E_-/R$ ;  $i_2(0_-) = 0$ . В момент коммутации токи индуктивностей должны скачком принять одинаковые значения [ $i_1(0_+) = i_2(0_+)$ ] и, следовательно, первый закон коммутации не выполняется (сравните с режимом работы цепи в задаче 6.9р).

Для определения токов  $i_1(0_+)$  и  $i_2(0_+)$  нужно использовать принцип непрерывности суммарного потокосцепления:

$$\Psi_1(0_-) + \Psi_2(0_-) = \Psi_1(0_+) + \Psi_2(0_+).$$

Выразив потокосцепления через токи ( $\Psi = Li$ ) и учитывая, что  $i_2(0_-) = 0$ , а  $i_1(0_+) = i_2(0_+)$ , получаем

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{E_-}{R}.$$

Для случая, когда в исходном состоянии ключ  $S$  разомкнут, индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  до коммутации включены последовательно и их токи имеют одинаковые значения  $i_1(0_-) = i_2(0_-) = E_-/R$ .

После замыкания ключа ток индуктивности  $L_2$  должен скачком принять нулевое значение  $i_2(0_+) = 0$ , а ток индуктивности  $L_1$  — удовлетворять принципу непрерывности суммарного потокосцепления  $L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-) = L_1 i_1(0_+) + L_2 i_2(0_+)$ .

Подставляя в это выражение найденные выше значения токов, получаем

$$i_1(0_+) = \frac{L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-)}{L_1} = \frac{L_1 + L_2}{RL_1} \frac{E_-}{R}.$$

**6.15м.** Примените принцип непрерывности суммарного потокосцепления:  $L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-) + M i_1(0_-) + M i_2(0_-) = (L_1 + L_2 + 2M) i_1(0_+)$ .

**6.16р.** В установившемся режиме напряжение емкости равно напряжению источника:  $u_C = E_1 = 5$  В при  $t < 0$  и  $u_C = E_2 = 10$  В при  $t \rightarrow \infty$ .

Для определения напряжения  $u_C$  в переходном режиме составим на основании второго закона Кирхгофа уравнение электрического равновесия цепи при  $t \geq 0$ :  $u_R + u_C = E_2$ . Учитывая, что  $u_R = Ri_R$ ,  $i_R = i_C = C \frac{du_C}{dt}$ , получим дифференциальное уравнение цепи для  $t \geq 0$ :

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E_2.$$

Будем искать решение этого уравнения в виде суммы свободной  $u_{C\text{св}}$  и вынужденной  $u_{C\text{вын}}$  составляющих:  $u_C = u_{C\text{св}} + u_{C\text{вын}}$ . Свободную составляющую напряжения на емкости найдем, решив однородное дифференциальное уравнение  $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$ . Этому уравнению соответствует характеристическое уравнение  $RCp + 1 = 0$ , которое имеет единственный корень  $p_1 = 1/(RC) = -10^6 \text{ с}^{-1}$ . Учитывая это, можно записать

$$u_{C\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} = A_1 e^{-10^6 t} \text{ В},$$

где  $A_1$  — постоянная интегрирования.

Вынужденная составляющая  $u_{C\text{вын}}$  равна напряжению на емкости в установившемся режиме после коммутации, т.е. при  $t \rightarrow \infty$ :  $u_{C\text{вын}} = E_2 = 10$  В.

Суммируя свободную и вынужденную составляющие, получим выражение для напряжения на емкости в переходном режиме:

$$u_C = A_1 e^{p_1 t} + E_2 = A_1 e^{-10^6 t} + 10 \text{ В.}$$

Для определения постоянной интегрирования  $A_1$  воспользуемся вторым законом коммутации, в соответствии с которым напряжение на емкости в начальный момент времени после коммутации ( $t = 0$ ) равно напряжению на емкости в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации ( $t = 0_-$ ):

$$u_C(0) = u_C(0_-) = E_1 = 5 \text{ В.}$$

Из выражения для  $u_C$  найдем  $A_1 = E_1 - E_2 = 5$  В. Таким образом, окончательное выражение для напряжения на емкости имеет вид

$$u_C = E_2 + (E_1 - E_2)e^{p_1 t} = 10 - 5e^{-10^6 t} \text{ В.}$$

Напряжение  $u_C$  после коммутации плавно увеличивается, начиная со значения  $u_C(0) = E_1 = 5$  В, и стремится к установившемуся значению  $u_C = E_2 = 10$  В при  $t \rightarrow \infty$  (рис. 6.20, а).

Ток цепи является током через емкость  $i = i_C = C \frac{du_C}{dt} = C p_1 (E_1 - E_2) e^{p_1 t} = 1 \cdot 10^{-3} e^{-10^6 t}$  А. В начальный момент времени ( $t = 0$ ) ток скачком возрастает от 0 до 1 мА, а затем плавно уменьшается, стремясь к нулю при  $t \rightarrow \infty$  (рис. Т6.20, б).

**6.21р.** Разделим исследуемый промежуток времени  $0 \leq t < \infty$  на два интервала:  $0 \leq t < t_{\text{и}}$  и  $t_{\text{и}} \leq t < \infty$ . В начале первого интервала (при  $t = 0$ ) напряжение на входе цепи скачком увеличивается от 0 до  $E = 5$  В. В начале второго ин-

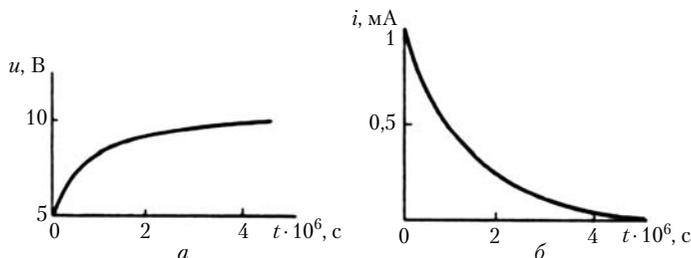


Рис. Т6.20

тервала (при  $t = t_{\text{н}}$ ) напряжение на входе скачком уменьшается от 5 В до 0. Таким образом, в пределах каждого интервала времени реакция цепи может быть определена таким же образом, как и при подключении цепи к источнику постоянного напряжения.

Рассмотрим интервал времени  $0 \leq t < t_{\text{н}}$ . Начальное значение тока для данного интервала  $i(0) = i(0_-) = 0$ . Для нахождения тока в переходном режиме составим на основании второго закона Кирхгофа уравнение электрического равновесия цепи для  $0 \leq t < t_{\text{н}}$ :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E.$$

Решение этого уравнения ищем в виде суммы свободной  $i_{\text{св}}$  и вынужденной  $i_{\text{вын}}$  составляющих:  $i = i_{\text{св}} + i_{\text{вын}}$ . Вынужденная составляющая  $i_{\text{вын}}$  на данном интервале времени равна установившемуся значению тока, который протекал бы в цепи при условии, что к входу ее в течение бесконечно большого промежутка времени приложено постоянное напряжение  $E$ :  $i_{\text{вын}} = E/R$ . Для определения свободной составляющей тока  $i_{\text{св}}$  составим характеристическое уравнение  $Lp + R = 0$  и найдем его корень:  $p_1 = -R/L$ . Таким образом, свободная составляющая тока для рассматриваемого первого интервала времени

$$i_{\text{св}} = B_1 e^{-t/\tau},$$

а искомый ток цепи

$$i = i_{\text{св}} + i_{\text{вын}} = \frac{E}{R} + B_1 e^{-t/\tau},$$

где  $\tau = L/R = 20$  мкс — постоянная времени цепи, а  $B_1$  — постоянная интегрирования. Постоянная интегрирования может быть определена при  $t = 0$ :  $i(0) = 0$ ,  $B_1 = -E/R$ . Для  $0 \leq t < t_{\text{н}}$  окончательно получим

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau}).$$

Рассмотрим интервал времени  $t_{\text{н}} \leq t < \infty$ . Начальное значение тока для данного интервала  $i(t_{\text{н}})$  в соответствии с первым законом коммутации равно значению тока в момент времени, непосредственно предшествующий  $t_{\text{н}}$ :

$$i(t_{\text{н}}) = i(t_{\text{н}}-) = \frac{E}{R}(1 - e^{-t_{\text{н}}/\tau}).$$

Дифференциальное уравнение цепи для  $t \geq t_{\text{и}}$  имеет вид

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0.$$

Вследствие того, что на этом интервале  $i_{\text{вын}} = 0$ , ток цепи  $i$  содержит только свободную составляющую:  $i = i_{\text{св}}$ . Так как свободные процессы в цепи не зависят от вида внешнего воздействия, свободная составляющая тока имеет такой же характер, что и на первом интервале времени, т.е.  $i = B_2 e^{-t/\tau}$ .

Постоянную интегрирования  $B_2$  найдем по известному значению тока цепи  $i(t_{\text{и}})$  в начале рассматриваемого интервала времени

$$i(t_{\text{и}}) = i(t_{\text{и}-}) = \frac{E}{R}(1 - e^{-t_{\text{и}}/\tau}) = B_2 e^{-t_{\text{и}}/\tau},$$

откуда

$$B_2 = \frac{E}{R}(e^{-t_{\text{и}}/\tau} - 1)$$

и, следовательно, при  $t_{\text{и}} \leq t < \infty$

$$i = \frac{E}{R}(e^{-t_{\text{и}}/\tau} - 1)e^{-t/\tau}.$$

Таким образом, ток рассматриваемой цепи при  $t \geq 0$  изменяется по следующему закону:

$$i = \begin{cases} \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau}) & \text{при } 0 \leq t < t_{\text{и}}, \\ \frac{E}{R}(e^{-t_{\text{и}}/\tau} - 1)e^{-t/\tau} & \text{при } t_{\text{и}} \leq t < \infty. \end{cases}$$

Используя компонентное уравнение индуктивности  $u_L = L \frac{di}{dt}$ , найдем напряжение индуктивности в переходном режиме:

$$u_L = \begin{cases} Ee^{-t/\tau} & \text{при } 0 \leq t < t_{\text{и}}, \\ -E(e^{-t_{\text{и}}/\tau} - 1)e^{-t/\tau} & \text{при } t_{\text{и}} \leq t < \infty. \end{cases}$$

Графики  $i(t)$ ,  $u_L(t)$ , соответствующие длительности импульса  $t_{\text{и}} = 5$  мкс или  $0,25\tau$ , приведены на рис. Т6.21, а, б. В начальный момент времени ( $t = 0$ ) напряжение  $u_L$  скачком возрастает от 0 до 5 В. На интервале  $0 \leq t < t_{\text{и}}$  напряжение  $u_L$  плавно уменьшается, достигая в конце интервала значения 3,9 В. В момент  $t = t_{\text{и}}$   $u_L$  скачком изменяется от 3,9 В до -1,1 В, а затем плавно уменьшается по абсолютному значению, стремясь к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом, при воз-

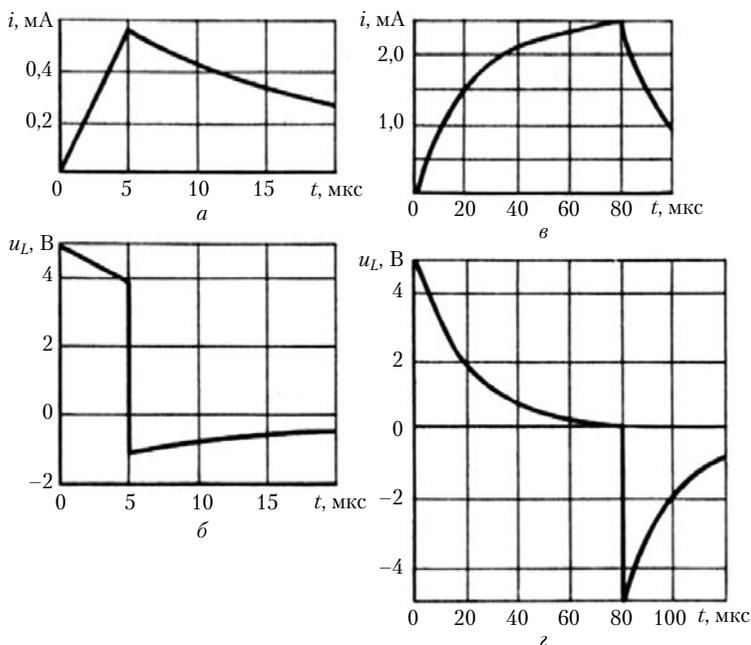


Рис. Т6.21

действию на цепь относительно короткого импульса напряжения  $u_L$  по форме не очень сильно отличается от входного напряжения.

Графики  $i(t)$  и  $u_L(t)$  для  $t_{\text{и}} = 80$  мкс ( $t_{\text{и}} = 4$ ) приведены на рис. Т6.21, в, г. Из сравнения рис. Т6.21, а и б с рис. Т6.21, в и г видно, что форма напряжения  $u_L$  резко отличается от прямоугольной.

Таким образом, характер переходного процесса зависит от соотношения между длительностью импульса входного напряжения и постоянной времени цепи.

**6.22м.** Рассмотрите аналитическое выражение для тока последовательной  $RL$ -цепи, включаемой на постоянное напряжение (см. задачу 6.21р). Установившееся значение тока  $i_{\text{уст}} = E/R$  определите по заданному графику, что позволит найти  $R$ .

В момент времени  $t_1 = \tau = L/R$  ток  $i(t_1) = \frac{E}{R}(1 - e^{-1}) = 0,632 \frac{E}{R}$ . По графику  $i(t)$  найдите время  $t_1$ , а затем индуктивность  $L = Rt_1$ .

**6.25р.** Критическое сопротивление контура  $R_{кр} = 2\rho = 2\sqrt{L/C} = 4$  кОм. Суммарное сопротивление контура  $R = 20$  Ом  $\ll R_{кр}$ . Свободные процессы в контуре имеют колебательный характер.

**6.27р.** Можно предложить несколько способов приближенного определения добротности контура по графику тока контура  $i(t)$ . Все они основаны на использовании аналитического выражения

$$i = \frac{E}{\omega_{св}L} e^{-\delta t} \sin \omega_{св}t = I_m(t) \sin \omega_{св}t,$$

где  $\delta = R/(2L)$  — коэффициент затухания;  $\omega_{св} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  — частота свободных колебаний в контуре;  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  — резонансная частота;  $I_m(t) = Ee^{-\delta t}/(\omega_{св}L)$  — амплитуда (точнее, огибающая) свободных колебаний.

Определим ток в моменты времени  $t_1$ ;  $t_1 + T_{св}$  и найдем их отношение:  $i(t_1)/i(t_1 + T_{св}) = I_m(t_1)/I_m(t_1 + T_{св}) = e^{\delta T_{св}}$ . Следовательно, отношение двух значений тока, взятых через период, не зависит от времени  $t_1$ , поэтому удобно использовать отношение двух соседних максимальных значений тока. Если затухание контура достаточно мало ( $\delta^2 \ll \omega_0^2$ ), то  $\omega_{св} \approx \omega_0$ ;  $T_{св} \approx 2\pi/\omega_0$ . Поэтому  $\delta T_{св} \approx \pi/Q$ , где  $Q = \omega_0 L/R$  — добротность контура. Отсюда

$$Q \approx \pi \left[ \ln \frac{i(t_1)}{i(t_1 + T_{св})} \right]^{-1}.$$

Отсчитаем  $N$  периодов колебаний тока на интервале времени  $[0; t_N]$ ,  $t_N = NT_{св}$ .

Огибающая тока  $Ee^{-\delta t}/(\omega_{св}L)$  максимальна в начале этого интервала  $E/(\omega_{св}L)$  и уменьшается до уровня  $Ee^{-\delta t_N}/(\omega_{св}L)$  в его конце. Отношение этих двух значений огибающей  $p = e^{\delta T_{св}N}$ . Для контура с малыми потерями  $\delta T_{св} \approx \pi/Q$ , поэтому  $Q \approx \pi NP(\ln p)^{-1}$ .

Практически удобно заранее задаваться некоторыми значениями  $p$ . Например, при  $p = 20$   $\pi/\ln p \approx 1,05$ ;  $Q \approx N$ . Поэтому добротность контура приближенно равна числу периодов колебаний тока, подсчитанных на интервале времени, в конце которого огибающая тока уменьшается в 20 раз по сравнению со своим значением в начале интервала. Аналогично,  $Q \approx 2N$  при  $p = 5$ .

Пусть в момент времени  $t_1$  огибающая тока составляет  $e^{-1} = 0,368$  от своего максимального значения (при  $t = 0$ ),

а интервалу  $[0, t_1]$  соответствует  $K$  периодов колебаний тока, т.е.  $t_1 = KT_{\text{св}}$ . Поскольку  $\delta t_1 = 1$ ,  $\delta T_{\text{св}} \approx \pi/Q$ , то  $Q \approx \pi K \approx 3K$ .

**6.29м.** Используйте результаты решения задачи 6.27р. По графику тока контура определите период колебаний тока  $T_{\text{св}}$  и максимальное значение огибающей тока  $I_{\text{max}}$  (при  $t = 0$ ). Из выражений  $I_{\text{max}} = E/(\omega_{\text{св}}L)$ ;  $\omega_{\text{св}} = 2\pi/T_{\text{св}}$  найдите индуктивность  $L$ . Определив по графику добротность  $Q$  и учитывая, что  $Q \approx \omega_0 L/R \approx \omega_{\text{св}}L/R$ ;  $\omega_{\text{св}} \approx 1/\sqrt{LC}$ , вычислите  $R$  и  $C$ .

**6.30р.** Дифференциальное уравнение цепи при  $t \geq 0$  имеет вид  $L \frac{di}{dt} + Ri = e$ . Свободная составляющая тока (см. задачу 6.21р)  $i_{\text{св}} = Be^{-Rt/L} = Be^{-2 \cdot 10^6 t}$  А. Вынужденная составляющая тока равна установившемуся значению тока цепи после коммутации (при  $t \rightarrow \infty$ ). Используя метод комплексных амплитуд, найдем

$$i_{\text{вын}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(10^6 t - \arctg \frac{\omega L}{R}\right) = 1,73 \cdot 10^{-3} \cos(10^6 t - 79^\circ) \text{ А}$$

Просуммировав свободную и вынужденную составляющие, определим ток цепи

$$i_{\text{вын}} = 1,73 \cdot 10^{-3} \cos(10^6 t - 79^\circ) + Be^{-2 \cdot 10^5 t} \text{ А}$$

Постоянную интегрирования  $B$  найдем исходя из условия, что начальное значение тока через индуктивность равно значению тока в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации. Подставив в полученное выражение для тока цепи  $t = 0$ ,  $i = 0$ , определим

$$B = -1,73 \cdot 10^{-3} \cos 79^\circ = -0,33 \cdot 10^{-3} \text{ А}$$

Окончательно имеем

$$i = 1,73 \cos(10^6 t - 79^\circ) - 0,33 e^{-2 \cdot 10^5 t} \text{ мА}$$

**6.33р.** При подаче импульса напряжения на вход цепи емкость  $C$  заряжается и напряжение  $u_C$  возрастает. В промежутках времени между импульсами емкость  $C$  разряжается и напряжение  $u_C$  убывает. Изменения  $u_C$  во времени происходят плавно, без скачков (в противном случае нарушался бы второй закон коммутации). Таким образом, процессы зарядки и разрядки емкости чередуются.

Во время действия первого импульса напряжение  $u_C$  увеличивается, начиная со значения  $u_C(0) = 0$ , по закону (см. задачу 6.16р)

$$u_C(t) = E - Ee^{-t/\tau}, \quad 0 \leq t < t_n.$$

К моменту окончания первого импульса ( $t = t_n$ ) емкость  $C$  оказывается заряженной до напряжения  $u_C(t_n) = U_{н1}$ , а затем на интервале между первым и вторым импульсами разряжается через сопротивление  $R$  и источник входного напряжения, который принимаем идеальным. При разрядке напряжение  $u_C$  изменяется по экспоненциальному закону

$$u_C(t) = U_{н1}e^{-(t-t_n)/\tau}, \quad t_n \leq t < T$$

и при  $t = T$  становится равным  $u_C(T) = U_{T1}$ . Поскольку  $u_C$  изменяется непрерывно, верхние границы двух указанных временных интервалов ( $t = t_n$  и  $t = T$  соответственно) могут быть включены в эти интервалы.

К моменту прихода второго импульса напряжение на емкости отлично от нуля ( $U_{T1} \neq 0$ ). Поэтому напряжение  $u_C$  во время действия этого импульса (см. задачу 6.16р)

$$u_C(t) = E - (E - U_{T1})e^{-(t-T)/\tau}, \quad T \leq t < T + t_n.$$

При этом процесс разрядки емкости описывают формулой

$$u_C(t) = U_{н2}e^{-(t-T-t_n)/\tau}, \quad T + t_n \leq t < 2T,$$

где  $U_{н2} = u_C(T + t_n)$ .

Аналогичным образом можно записать выражение для реакции цепи на третий и последующие импульсы.

Если при вычислениях  $u_C(t)$  перейти к отсчету времени от начала очередного импульса, то выражения для реакции цепи на любой импульс входной последовательности станут единообразными по форме

$$u_C(t') = \begin{cases} E - (E - U_T)e^{-t'/\tau} & \text{при } 0' \leq t' < t_n, \\ U_{нn}e^{-(t'-t_n)/\tau} & \text{при } t_n \leq t' < T, \end{cases}$$

где  $U_T = u_C(0)$  — начальное напряжение на емкости (для всех импульсов, кроме первого,  $U_T \neq 0$ );  $U_{нn} = u_C(t_n)$  — напряжение на емкости к моменту окончания импульса;  $t' = t - (n - 1)T$  — время, отсчитываемое от начала рассматриваемого импульса;  $n = 1, 2, 3, \dots$  — порядковый номер импульса.

Графики  $u_C(t)$  для заданных значений  $t_n$  и  $T$  приведены на рис. Т6.22, а — в.

Очевидно, что по прошествии достаточно большого времени  $t_{уст}$  с момента подачи на вход цепи первого импульса бесконечной импульсной последовательности переходный

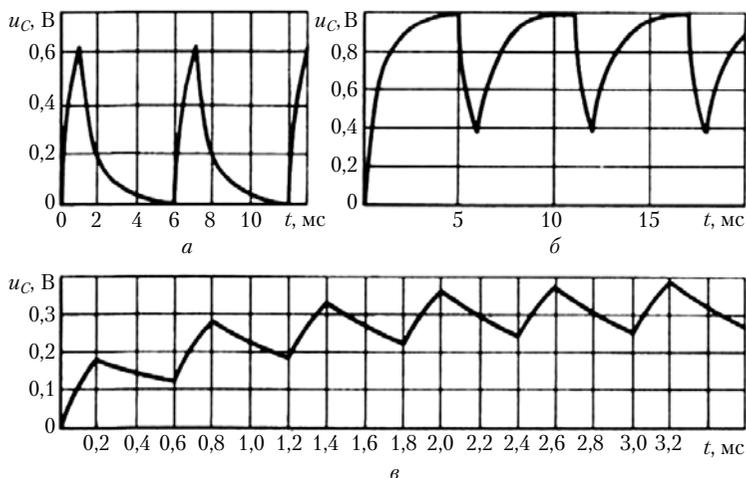


Рис. Т6.22

режим в цепи затухает и устанавливается стационарный режим, в котором напряжение на емкости представляет собой периодическую функцию времени:  $u_C(t) = u_C(t + T)$ . (Заметим, что теоретически  $t_{уст} \rightarrow \infty$ , поэтому при расчете  $u_C(t)$  по приведенным формулам для переходного режима последнее равенство выполняется лишь приближенно.) Исследованию стационарного режима в простейших цепях при периодическом импульсном воздействии посвящены задачи 6.69–6.71.

Из графиков рис. Т6.22 очевидно, что в первом случае стационарный режим устанавливается практически сразу ( $t_{уст} \approx 0$ ), во втором —  $t_{уст} \approx 6$  мс, а в третьем —  $t_{уст} \approx 3$  мс.

## 6.2. Операторный метод анализа переходных процессов

**6.34р.** Постройте операторную схему замещения и, используя метод токов ветвей в операторной форме, составьте уравнения электрического равновесия цепи, схема замещения которой для мгновенных значений приведена на рис. Т6.23.

**6.35р.** Постройте операторную схему замещения цепи рис. Т6.24. Составьте уравнения электрического равновесия цепи в операторной форме, используя методы контурных токов и узловых напряжений.

**6.36р.** Постройте операторную схему замещения цепи, содержащей связанные индуктивности (рис. Т6.25).

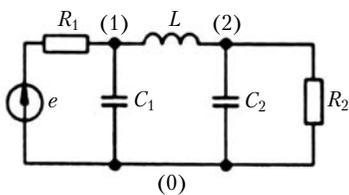


Рис. T6.23

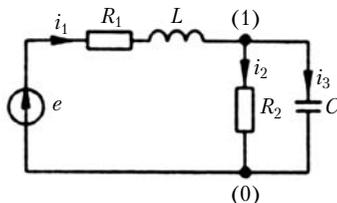


Рис. T6.24

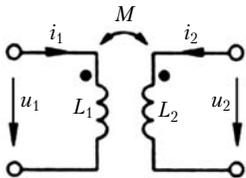


Рис. T6.25

**6.37м.** Используя свойство линейности преобразования Лапласа и зная, что изображение функции  $e^{-at} \doteq (p+a)^{-1}$ , найдите изображения следующих функций: а)  $\text{sh } at$ ; б)  $\text{ch } at$ ; в)  $\sin at$ ; г)  $\cos at$ ; д)  $1 - e^{-at}$ ; е)  $e^{-bt} - e^{-at}$ ; ж)  $\sin(bt + \varphi)$ ; з)  $\cos(bt + \varphi)$ .

**6.38.** Используя теорему смещения и результаты предыдущей задачи, найдите изображения по Лапласу следующих функций: а)  $e^{-bt}\text{sh } at$ ; б)  $e^{-bt}\text{ch } at$ ; в)  $e^{-bt}\sin at$ ; г)  $e^{-bt}\cos(at + \varphi)$ .

**6.39м.** Определите значения функций  $f(t)$  при  $t = 0$  и  $t = \infty$  по их изображениям:

$$\text{а) } \frac{1}{p+a}; \quad \text{б) } \frac{1}{(p+a)(p+b)}; \quad \text{в) } \frac{1}{p(p+a)}; \quad \text{г) } \frac{p+b}{p(p+a)}.$$

**6.40.** Применяя разложение на простые дроби, найдите оригиналы, соответствующие изображениям:

$$\text{а) } \frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)}; \quad \text{б) } \frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}.$$

**6.41.** Используя теорему разложения, найдите оригиналы, соответствующие изображениям:

$$\text{а) } \frac{1}{p(p^2+1)}; \quad \text{б) } \frac{1}{(p^2+1)(p^2+4)}.$$

**6.42м.** Для некоторого двухполюсника с нулевыми начальными условиями известны графики входного напряжения  $u(t)$  и входного тока  $i(t)$  (рис. T6.26, а, б). Определите входное сопротивление двухполюсника в операторной форме  $Z(p)$ .

**6.43м.** Решите задачу 6.42м для случая, когда  $u(t)$  и  $i(t)$  заданы графиками рис. T6.26, а, в.

**6.44м.** Для некоторого четырехполюсника с нулевыми начальными условиями известны графики входного  $u_1(t)$

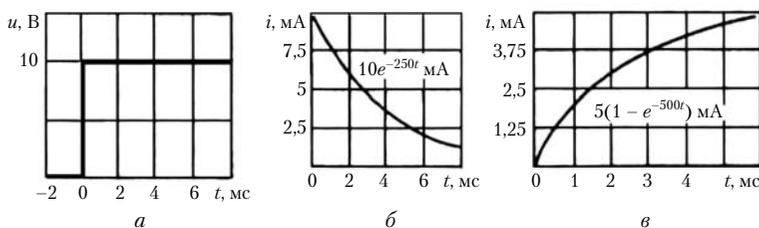


Рис. Т6.26

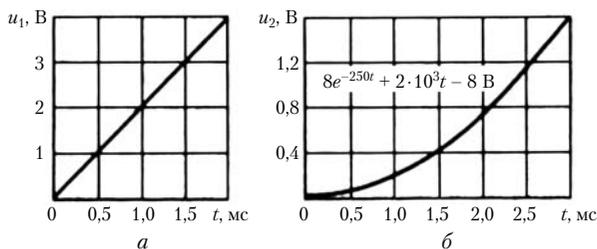


Рис. Т6.27

и выходного  $u_2(t)$  напряжений (рис. Т6.27, а, б). Определите операторный коэффициент передачи четырехполосника по напряжению  $K(p)$ .

**6.45м.** Для некоторого двухполосника с нулевыми начальными условиями известны графики входного напряжения  $u(t)$  и входного тока  $i(t)$  (рис. Т6.28, а, б). Найдите входное сопротивление двухполосника в операторной форме  $Z(p)$ .

**6.46р.** Решите задачу 6.16р операторным методом.

**6.47р.** Решите задачу 6.21р операторным методом.

**6.48р.** На вход последовательной  $RLC$ -цепи в момент времени  $t = 0$  поступает скачок напряжения 1 В. Найдите зависимость тока цепи от времени, при нулевых начальных условиях, если  $R = 4$  кОм;  $L = 20$  мГн;  $C = 5000$  пФ.

**6.49р.** Напряжение на входе последовательной  $RL$ -цепи изменяется по закону

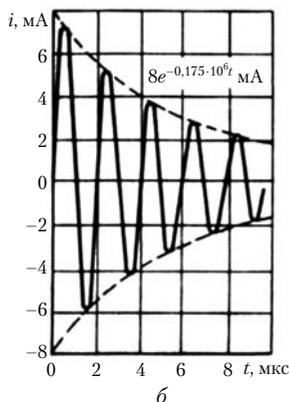
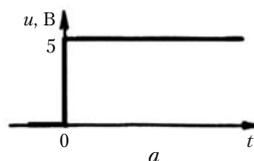


Рис. Т6.28

$$u = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ U_m \cos \omega t & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Найдите закон изменения тока цепи.

**6.50р.** Последовательную  $RL$ -цепь при нулевых начальных условиях в момент времени  $t = 0$  подключают к источнику ЭДС  $e(t) = 10 \cos(2\pi \cdot 10^5 t + \alpha)$  В. Определите зависимость тока цепи от времени, если  $R = 1$  кОм;  $L = 1$  мГн.

**6.51м.** Последовательную  $RC$ -цепь при нулевых начальных условиях в момент времени  $t = 0$  подключают к источнику ЭДС  $e(t) = 10 \cos(2\pi \cdot 10^5 t + \alpha)$  В. Найдите значение начальной фазы  $\alpha_0$ , при котором установившийся режим наступает мгновенно, если  $R = 1$  кОм;  $C = 5$  нФ.

**6.52м.** Последовательную  $RC$ -цепь в момент времени  $t = 0$  подключают к источнику ЭДС  $e(t) = 10 \cos(2\pi \cdot 10^5 t + \alpha)$  В;  $R = 1$  кОм;  $C = 5$  нФ. В этот момент напряжение на емкости  $U_0 = 2$  В. Найдите зависимость  $u_C(t)$  при  $t \geq 0$  и определите значение начальной фазы  $\alpha_0$  при котором переходный процесс в цепи отсутствует.

**6.53м.** По данным задачи 6.52м выясните, при каких значениях начального напряжения на емкости  $U_0$  переходный процесс в цепи имеет место при любой начальной фазе  $\alpha$ .

**6.54м.** Цепь на рис. Т6.29 подключают к источнику постоянной ЭДС. Найдите соотношение между параметрами элементов цепи, соответствующее колебательному характеру переходного процесса. Определите частоту свободных колебаний цепи. Задачу решите двумя способами на основании: а) анализа характеристического уравнения цепи; б) анализа уравнения  $Z_{\text{вх}}(p) = 0$  ( $Z_{\text{вх}}(p)$  — входное сопротивление цепи в операторной форме).

**6.55.** Решите задачу 6.54м для цепи рис. Т6.30.

**6.56.** Решите задачу 6.54м для цепи рис. Т6.31.

**6.57м.** Цепь (рис. Т6.32) подключают к идеальному источнику постоянного тока. Какому условию должно отвечать сопротивление  $R$ , чтобы переходный процесс в цепи носил колебательный характер? Определите частоту сво-

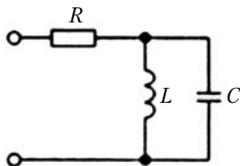


Рис. Т6.29

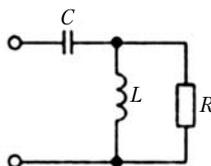


Рис. Т6.30

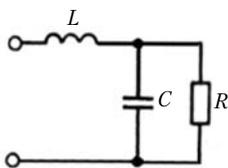


Рис. Т6.31

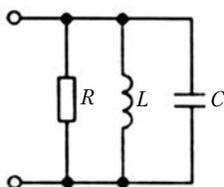


Рис. Т6.32

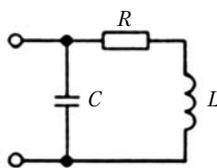


Рис. Т6.33

бодных колебаний цепи. Как изменятся результаты решения задачи, если сопротивление, включенное параллельно индуктивности (рис. Т6.32), заменить сопротивлением, включенным последовательно с индуктивностью (рис. Т6.33)?

**6.58р.** Найдите операторные изображения одиночных импульсов (рис. Т6.34, *a – ж*).

**6.59р.** Известно операторное изображение  $F_1(p)$  одиночного импульса. Покажите, что изображение периодической ( $t > 0$ ) последовательности импульсов, полученной повторением импульса с периодом  $T$ , есть  $F(p) = F_1(p)(1 - e^{-pT})^{-1}$ .

**6.60.** Найдите изображение по Лапласу периодической ( $t > 0$ ) последовательности импульсов, полученной повторением каждого импульса на рис. Т6.34 с периодом  $T > t_{и}$ .

**6.61.** Определите операторное изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ |A \sin \omega_1 t| & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

**6.62.** Найдите операторное изображение ступенчатой функции (рис. Т6.35) с бесконечным числом ступенек.

**6.63м.** Определите изображения по Лапласу периодических функций, графики которых приведены на рис. Т6.36 и Т6.37.

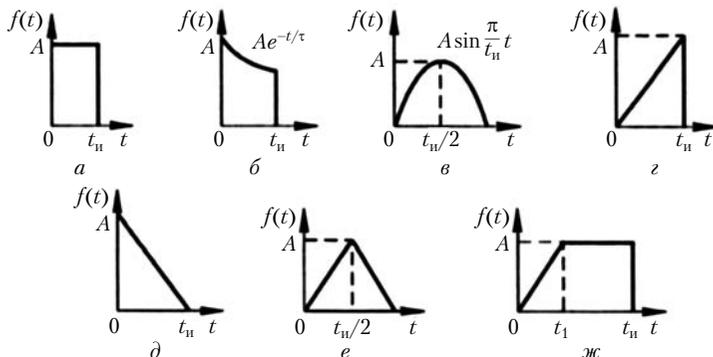


Рис. Т6.34

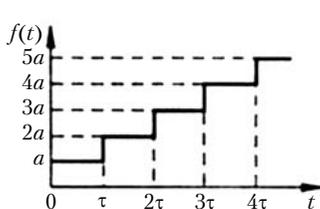


Рис. Т6.35

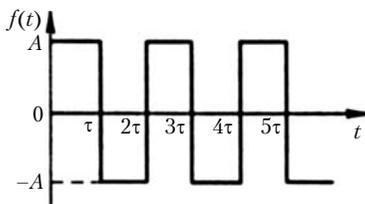


Рис. Т6.36

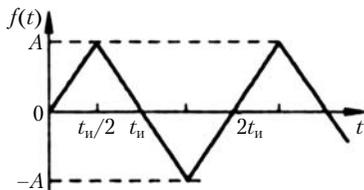


Рис. Т6.37

**6.64р.** На  $RC$ -цепь с нулевыми начальными условиями воздействует треугольный импульс напряжения (рис. Т6.38,  $a, б$ ). Найдите напряжение на выходе цепи  $u_2(t)$ .

**6.65м.** Решите предыдущую задачу, считая, что напряжение на входе цепи представляет собой периодическую последовательность импульсов треугольной формы (рис. Т6.38,  $a, в$ ).

**6.66м.** Последовательную  $RC$ -цепь (рис. Т6.39) с нулевыми начальными условиями в момент времени  $t = 0$  подключают к источнику напряжения, который вырабатывает импульс треугольной формы (см. рис. Т6.38,  $б$ ). Найдите напряжение на выходе цепи.

**6.67м.** На вход последовательного  $LC$ -контура без потерь с нулевыми начальными условиями в момент времени  $t = 0$  поступает прямоугольный импульс напряжения высотой  $E$  и длительностью  $t_n$ . Найдите напряжение на емкости  $u_C(t)$ .

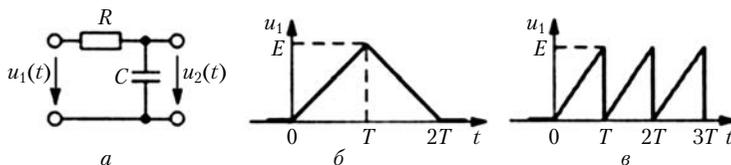


Рис. Т6.38

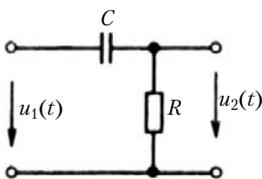


Рис. Т6.39

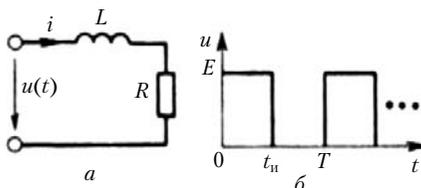


Рис. Т6.40

При каком значении  $t_{и}$  напряжение  $u_C(t) = 0$ , при  $t > t_{и}$ ? Дайте физическую интерпретацию этому результату.

**6.68м.** На параллельный  $LC$ -контур без потерь с нулевыми начальными условиями в момент времени  $t = 0$  поступает прямоугольный импульс тока высотой  $I_0$  и длительностью  $t_{и}$ . Найдите напряжение на емкости  $u_C(t)$ . При каком значении  $t_{и}$  напряжение  $u_C(t) = 0$ , при  $t > t_{и}$ ? Дайте физическую интерпретацию этому результату.

**6.69р.** Рассчитайте ток последовательной  $RL$ -цепи в установившемся режиме при воздействии на цепь бесконечной последовательности прямоугольных положительных импульсов напряжения (рис. Т6.40, а, б).

**6.70.** По данным задачи 6.69р найдите напряжение на индуктивности  $u_L$  в установившемся режиме.

**6.71м.** Определите напряжение  $u_C$  последовательной  $RC$ -цепи в установившемся режиме при воздействии на нее такого же импульсного напряжения, как и в задаче 6.69р.

**6.72р.** Напряжение  $u_2(t)$  на выходе идеализированной электрической цепи повторяет напряжение  $u_1(t)$  на входе:  $u_2(t) = u_1(t - t_0)$ , где  $t_0$  — положительная константа. Найдите операторный коэффициент передачи цепи по напряжению  $K(p)$ . Можно ли построить реальную цепь с таким  $K(p)$ ?

### Решения и методические указания

**6.34р.** Операторная схема замещения рассматриваемой цепи приведена на рис. Т6.41.

Уравнения электрического равновесия цепи в операторной форме имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) &= 0; \\ (R_1 + pL)I_1(p) + R_2I_2(p) &= E(p) + Li_1(0); \\ \frac{1}{pC}I_3(p) - R_2I_2(p) &= -\frac{u_C(0)}{p}. \end{aligned}$$

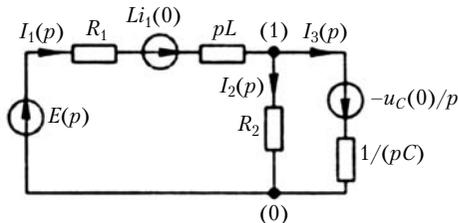


Рис. Т6.41

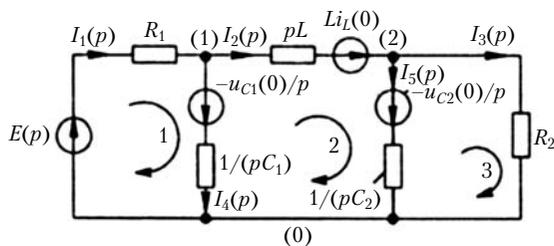


Рис. Т6.42

**6.35.** Операторная схема замещения рассматриваемой цепи приведена на рис. Т6.42. Выбирая систему независимых контуров так, как показано на рис. Т6.42, составим уравнения электрического равновесия методом контурных токов:

$$Z_{(11)}I_{11}(p) + Z_{(12)}I_{22}(p) = E(p) - \frac{u_{C1}(0)}{p};$$

$$Z_{(21)}I_{11}(p) + Z_{(22)}I_{22}(p) + Z_{(23)}I_{33}(p) = Li_L(0) - \frac{u_{C2}(0)}{p} + \frac{u_{C1}(0)}{p};$$

$$Z_{(32)}I_{22}(p) + Z_{(33)}I_{33}(p) = \frac{u_{C2}(0)}{p},$$

где  $Z_{(11)} = R_1 + 1/(pC_1)$ ;  $Z_{(22)} = 1/(pC_1) + 1/(pC_2) + pL$ ;  $Z_{(33)} = R_2 + 1/(pC_2)$ ;  $Z_{(12)} = Z_{(21)} = -1/(pC_1)$ ;  $Z_{(23)} = Z_{(32)} = -1/(pC_2)$ ;  $I_{11}(p) = I_1(p)$ ;  $I_{22}(p) = I_2(p)$ ;  $I_{33}(p) = I_3(p)$ .

Для того чтобы составить уравнения электрического равновесия цепи методом узловых напряжений, заменим последовательные схемы замещения источников на параллельные (рис. Т6.43). Уравнения электрического равновесия цепи, составленные этим методом, имеют вид

$$Y_{(11)}U_{10}(p) + Y_{(12)}U_{20}(p) = \frac{E(p)}{R_1} + C_1u_{C1}(0) - \frac{i_L(0)}{p};$$

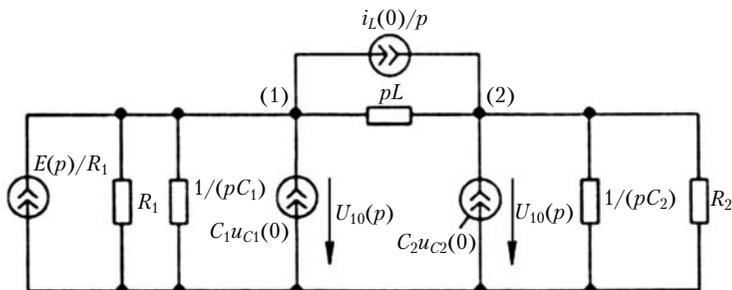


Рис. Т6.43

$$Y_{(21)}U_{10}(p) + Y_{(22)}U_{20}(p) = \frac{i_L(0)}{p} + C_2u_{C2}(0),$$

где  $Y_{(11)} = 1/R_1 + pC_1 + 1/(pL)$ ;  $Y_{(22)} = 1/(pL) + 1/R_2$ ;  $Y_{(12)} = Y_{(21)} = -1/(pL)$ .

**6.36р.** Уравнения, связывающие мгновенные значения токов и напряжений рассматриваемой цепи, имеют вид

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \quad u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}.$$

Перейдя от мгновенных значений токов и напряжений к их изображениям по Лапласу, получим следующую систему уравнений для изображений:

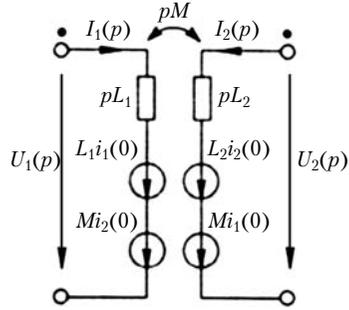


Рис. Т6.44

$$U_1(p) = pL_1I_1(p) - L_1i_1(0) + pMI_2(p) - Mi_2(0);$$

$$U_2(p) = pMI_1(p) - Mi_1(0) + pL_2I_2(p) - L_2i_2(0).$$

Операторная схема замещения цепи, соответствующая этим уравнениям, приведена на рис. Т6.44.

**6.37м.** Гиперболические функции выразите через экспоненты с вещественными показателями, а гармонические — через экспоненты с мнимыми показателями.

**6.39м.** Используйте предельные соотношения

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p); \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p).$$

**6.42м—6.45м.** Эти задачи однотипны. Для их решения необходимо перейти от заданных функций времени к их изображениям по Лапласу.

**6.46р.** Операторная схема замещения цепи после коммутации приведена на рис. Т6.45. Уравнение электрического равновесия цепи, составленное по второму закону Кирхгофа,  $[R + 1/(pC)]I(p) = E_2/p - E_1/p$ . Решив это уравнение, найдем изображение входного тока цепи и изображение напряжения на емкости:  $I(p) = (E_2 - E_1)\{R[p + 1/(RC)]\}^{-1}$ ;  $U_C(p) = E_1(p) + (E_2 - E_1)\{RCp[p + 1/(RC)]\}^{-1}$ . Учитывая, что  $(p + a)^{-1} \doteq e^{-at}$  и  $[p(p + a)] \doteq (1/a)(1 - e^{at})$ , перейдем от изображений входного тока и напряжения на емкости к оригиналам:

$$i = \frac{E_2 - E_1}{R} e^{-t/RC} = 1 \cdot 10^{-3} e^{-10^6 t} \text{ А,}$$

$$u_C = E_1 + (E_2 - E_1)(1 - e^{-t/RC}) = 10 - 5e^{-10^6 t} \text{ В.}$$

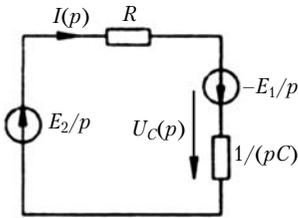


Рис. Т6.45

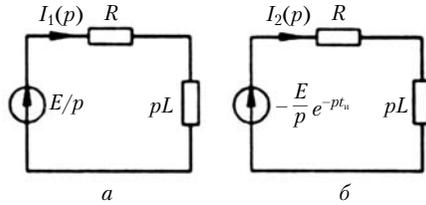


Рис. Т6.46

**6.47р.** Одиночный прямоугольный импульс напряжения  $E$  длительностью  $t_n$  можно представить в виде суммы двух скачков напряжения: первого ( $E$ ), приложенного к входу цепи в момент времени  $t = 0$ , и второго ( $-E$ ), приложенного к входу цепи в момент времени  $t = t_n$ . Для анализа переходных процессов в цепи целесообразно воспользоваться методом наложения, в соответствии с которым реакция линейной цепи на воздействие двух скачков может быть найдена как сумма реакций цепи на воздействие каждого из скачков в отдельности. Таким образом, входной ток  $i$  может быть определен как сумма двух токов  $i_1$  и  $i_2$ , вызванных соответственно действием первого и второго скачков напряжения в отдельности.

Операторные схемы замещения для определения  $I_1(p) \doteq i_1$  и  $I_2(p) \doteq i_2$  приведены на рис. Т6.46, а, б. Напомним, что в соответствии с теоремой запаздывания смещение функции по оси времени вправо на  $t_n$  соответствует умножению изображения на  $e^{-pt_n}$ .

Используя операторные схемы замещения цепи, найдем изображения токов  $i_1$  и  $i_2$ :

$$I_1(p) = \frac{E}{pL(p + R/L)}; \quad I_2(p) = \frac{-E}{pL(p + R/L)} e^{-pt_n}.$$

Перейдя от изображений к оригиналам, получим

$$i_1 = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L}); \quad i_2 = -\frac{E}{R}(1 - e^{-R(t-t_n)/L}).$$

В интервале времени  $0 \leq t < t_n$  ток цепи  $i$  равен току  $i_1$ :  $i = i_1 = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$ , в интервале  $t_n \leq t < \infty$  ток цепи  $i$  равен сумме токов  $i_1$  и  $i_2$ :  $i = i_1 + i_2 = \frac{E}{R}(e^{Rt_n/L} - 1)e^{-Rt/L}$ .

Напряжение  $u_L$  найдем таким же образом, как и в задаче 6.21р.

**6.48р.** Изображение тока цепи имеет вид

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{1}{p[pL + R + 1/(pC)]} = \frac{50}{p^2 + 2 \cdot 10^5 p + 10^{10}}.$$

Уравнение  $p^2 + 2 \cdot 10^5 p + 10^{10} = 0$  имеет два одинаковых корня:  $p_1 = p_2 = -1 \cdot 10^5$ . Учтя, что  $1/(p + a)^2 \doteq te^{-at}$ , перейдем от изображения входного тока к оригиналу:  $i = 50te^{-1 \cdot 10^5 t}$  А.

**6.49р.** Изображение входного напряжения и операторная входная проводимость имеют вид

$$U(p) = U_m \frac{p}{p^2 + \omega^2}; \quad Y(p) = \frac{1}{pL + R}.$$

Начальные условия в цепи нулевые, поэтому изображение входного тока

$$I(p) = Y(p)U(p) = \frac{U_m p}{(pL + R)(p^2 + \omega^2)}.$$

Для определения входного тока  $i(t) \doteq I(p)$  применим теорему разложения. Полюсы функции  $I(p)$  первого порядка:  $p_1 = -R/L$ ;  $p_2 = j\omega$ ;  $p_3 = -j\omega$ . В соответствии с теоремой разложения искомым оригинал  $i(t)$  равен сумме вычетов функции  $F(p) = I(p)e^{pt}$  в этих полюсах. Представим функцию  $F(p)$  в виде

$$F(p) = I(p)e^{pt} = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)},$$

где  $\varphi(p) = U_m p e^{pt}$ ;  $\psi(p) = (pL + R)(p^2 + \omega^2)$ .

Вычет функции  $F(p)$  в полюсе первого порядка  $p_k$

$$\text{Res } F(p) = \frac{\varphi(p_k)}{\psi'(p_k)} = \frac{U_m p_k e^{p_k t}}{3p_k^2 L + 2p_k R + \omega^2 L}.$$

Отсюда

$$i(t) = \sum_k \text{Res } F(p) = \sum_k U_m p_k e^{p_k t} (3p_k^2 L + 2p_k R + \omega^2 L)^{-1}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Полюсу  $p_1 = -R/L$  соответствует составляющая тока  $i^{(1)} = -U_m R e^{-Rt/L} [R^2 + (\omega L)^2]^{-1}$ . Аналогично найдем две другие составляющие тока, соответствующие полюсам  $p_2$  и  $p_3$ , и их сумму:

$$i^{(2)} = \frac{U_m}{2} \frac{j\omega e^{j\omega t}}{-\omega^2 L + j\omega R}; \quad i^{(3)} = \frac{U_m}{2} \frac{j\omega e^{-j\omega t}}{\omega^2 L + j\omega R};$$

$$i^{(2)} + i^{(3)} = U_m \frac{R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Преобразуем последнее выражение с помощью соотношения  $b \cos A + q \sin A = r \cos(A - \varphi)$  ( $r = \sqrt{b^2 + q^2}$ ;  $\varphi = \arctg q/b$ ):

$$i^{(2)} + i^{(3)} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t - \varphi),$$

где  $\varphi = \arctg(\omega L/R)$ .

Ток цепи  $i$  равен сумме всех трех составляющих:  $i = i^{(1)} + i^{(2)} + i^{(3)}$ . Выражение для  $i^{(1)}$  можно преобразовать с помощью легко проверяемого соотношения

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \cos \arctg(\omega L/R).$$

Таким образом, ток цепи

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t - \varphi) - \frac{U_m \cos \varphi}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-Rt/L},$$

где  $\varphi = \arctg(\omega L/R)$ .

Напомним, что реакцию цепи в переходном режиме можно представить в виде суммы двух составляющих: вынужденной и свободной. В установившемся режиме в рассматриваемой цепи протекает гармонический ток  $i_{\text{вын}}$ , значение которого можно определить методом комплексных амплитуд. Нетрудно убедиться, что оно совпадает с первым слагаемым в правой части последнего выражения для переходного тока цепи, поэтому второе слагаемое имеет смысл свободной составляющей тока  $i_{\text{св}}$ .

**6.50р.** Эту задачу можно решить таким же методом, что и задачу 6.49р, вычисляя вычеты функции  $F(p) = Y(p)U(p)e^{pt}$ : сначала находят вынужденную и свободную составляющие реакции цепи, а затем их сумму. Однако вынужденную составляющую можно определить проще, поскольку при заданном входном воздействии в установившемся режиме протекает гармонический ток  $i_{\text{вын}}$  и его можно рассчитать методом комплексных амплитуд, после чего останется найти свободную составляющую реакции. Такова идея расчета переходных процессов методом отделения свободной составляющей реакции от вынужденной.

Установившийся ток в цепи

$$i_{\text{вын}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t + \alpha - \varphi); \quad \varphi = \arctg(\omega L/R).$$

Определим свободную составляющую тока  $i_{\text{св}}$ . Для этого нужно вычислить вычет функции  $F(p)$  в полюсе операторной проводимости цепи  $Y(p) = (R + pL)^{-1}$ . Изображение входного напряжения  $u = U_m \cos(\omega t + \alpha)$

$$U(p) = U_m \frac{p \cos \alpha - \omega \sin \alpha}{p^2 + \omega^2};$$

$$i_{\text{св}} = \operatorname{Res}_{p_i = -R/L} \{U_m(p \cos \alpha - \omega \sin \alpha) e^{pt} [(pL + R)(p^2 + \omega^2)]^{-1}\}.$$

Вычисляя вычет (см. задачу 6.49р), находим:

$$i_{\text{св}} = \left. \frac{U_m(p \cos \alpha - \omega \sin \alpha) e^{pt}}{3p^2 L + 2pR + \omega^2 L} \right|_{p = -R/L}.$$

Отсюда

$$i_{\text{св}} = -U_m L \frac{\left( \frac{R}{L} \cos \alpha + \omega \sin \alpha \right) e^{-Rt/L}}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Используя уже встречавшееся в задаче 6.49р соотношение  $b \cos A + q \sin A = \sqrt{b^2 + q^2} \cos(A - \operatorname{arctg} q/b)$ , окончательно получим

$$i_{\text{св}} = -\frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\alpha - \varphi) e^{-Rt/L}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}(\omega L/R).$$

Свободную составляющую тока  $i_{\text{св}}$  можно определить иначе. Так как  $i = i_{\text{св}} + i_{\text{вын}}$ , а начальные условия в цепи нулевые, т.е.  $i(0) = 0$ , то

$$i_{\text{св}}(0) = -i_{\text{вын}}(0) = -\frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\alpha - \varphi).$$

Изображение свободной составляющей тока найдем из операторной схемы замещения цепи рис. Т6.47:

$$I_{\text{св}}(p) = \frac{Li_{\text{св}}(0)}{pL + R} = \frac{i_{\text{св}}(0)}{p + R/L},$$

откуда

$$i_{\text{св}} = i_{\text{св}}(0) e^{-Rt/L} = -\frac{U_m \cos(\alpha - \varphi)}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-Rt/L}.$$

Таким образом, ток цепи

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} [\cos(\omega t + \alpha - \varphi) - \cos(\alpha - \varphi) e^{-Rt/L}].$$

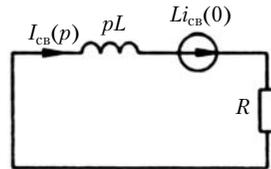


Рис. Т6.47

Как следует из этого выражения, установившийся режим наступает мгновенно при  $\cos(\alpha - \varphi) = 0$ , поскольку выполнение этого условия означает отсутствие свободной составляющей тока цепи. Очевидно, что условие  $\cos(\alpha - \varphi) = 0$  выполняется при  $\alpha = \alpha_0 = \arctg(\omega L/R) \pm \pi/2$ . Следовательно, существуют два значения начальной фазы входного напряжения  $\alpha_{01}$  и  $\alpha_{02}$ , при которых переходный процесс в цепи отсутствует. Для заданных параметров цепи

$$\begin{aligned} \arctg(\omega L/R) &= 0,56 \text{ рад}; \quad \alpha_{01} = 2,13 \text{ рад}; \quad \alpha_{02} = -1,01 \text{ рад}; \\ i &= 8,47[\cos(2\pi \cdot 10^5 t + \alpha - 0,56) - \cos(\alpha - 0,56)]e^{-10^6 t} \text{ мА}. \end{aligned}$$

**6.51м–6.53м.** Эти задачи целесообразно решать методом отделения свободной составляющей реакции цепи от вынужденной (см. задачу 6.50р). Как и в задаче 6.50р, аналитическое выражение для реакции цепи содержит наряду с гармонической также и экспоненциальную компоненту. При выполнении определенных условий экспоненциальная компонента может отсутствовать, т.е. будет отсутствовать переходный процесс.

**6.54м.** При составлении характеристических уравнений используйте результаты решения задач 6.1р–6.4.

**6.57м.** Составьте и проанализируйте уравнение  $Y_{\text{вх}}(p) = 0$ .

**6.58р.** Изображения одиночных импульсов, приведенных в условиях этой задачи, целесообразно найти одним из двух способов:

1) непосредственным применением преобразования Лапласа

$$f(t) \doteq F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^{t_n} f(t)e^{-pt} dt;$$

2) представлением заданной функции  $f(t)$  в виде суммы более простых функций  $f_i(t)$ . Последний прием основан на линейности преобразования Лапласа и эффективен, если указанное представление очевидно, а изображения  $F_i(p) \doteq f_i(t)$  отыскивают достаточно просто.

Для рис. Т6.34, а

$$F(p) = A \int_0^{t_n} e^{-pt} dt = \frac{A}{p} (1 - e^{-pt_n}).$$

Для рис. Т6.34, б

$$F(p) = A \int_0^{t_n} e^{-t/\tau} dt = A \frac{1 - e^{-\left(p + \frac{1}{\tau}\right)t_n}}{p + 1/\tau}.$$

Для рис. Т6.34, в

$$F(p) = A \int_0^{t_n} \left[ \sin \frac{\pi}{t_n} t \right] e^{-pt} dt.$$

Интеграл определим с помощью соотношения

$$\int e^{ax} \sin x dx = e^{ax} (a \sin x - \cos x) (a^2 + 1)^{-1}.$$

В результате получим

$$F(p) = \frac{\pi A}{t_n} (1 + e^{-pt_n}) [p^2 + (\pi/t_n)^2]^{-1}.$$

Для рис. Т6.34, з

$$F(p) = \frac{A}{t_n} \int_0^{t_n} t e^{-pt} dt.$$

Этот интеграл вычислим с помощью соотношения

$$\int x e^{ax} dx = e^{ax} a^{-2} (ax - 1).$$

В результате получим

$$F(p) = \frac{A}{t_n p^2} [1 - e^{-pt_n} (pt_n + 1)].$$

Для рис. Т6.34, д

$$F(p) = \int_0^{t_n} f(t) e^{-pt} dt.$$

Функция  $f(t)$  на интервале  $0 \leq t < t_n$  может быть записана в виде

$$f(t) = A(t_n - t)t_n^{-1},$$

поэтому

$$F(p) = A \int_0^{t_n} e^{-pt} dt - A t_n^{-1} \int_0^{t_n} t e^{-pt} dt.$$

Первый интеграл равен  $A(1 - e^{-pt_n})p^{-1}$ , второй интеграл найден для рис. Т6.34, з. В результате получим

$$F(p) = \frac{A}{t_n p^2} (pt_n - 1 + e^{-pt_n}).$$

Для рис. Т6.34, е

$$F(p) = \int_0^{t_n} f(t) e^{-pt} dt,$$

$$\text{где } f(t) = \begin{cases} -\frac{2A}{t_n}t & \text{при } 0 \leq t < t_n/2, \\ \frac{2A}{t_n}(t_n - t) & \text{при } t_n/2 \leq t \leq t_n. \end{cases}$$

Вычислив этот интеграл, найдем

$$F(p) = \frac{A}{t_n p^2} (1 - e^{-pt_n/2})^2.$$

Для рис. Т6.34, ж представим заданный импульс в виде суммы треугольного импульса, подобного изображенному на рис. Т6.34, з ( $t_n = t_1$ ), и прямоугольного длительностью  $t_n - t_1$ , смещенного вправо относительно точки  $t = 0$  на  $t_1$ . На основании результатов, полученных для рис. Т6.34, а, з, и с учетом теоремы запаздывания для второго импульса имеем

$$F_1(p) = \frac{A}{t_1 p^2} [1 - (pt_1 + 1)e^{-pt_1}];$$

$$F_2(p) = \frac{A}{t} (e^{-pt_1} - e^{-pt_n});$$

$$F(p) = F_1(p) + F_2(p) = \frac{A}{t_1 p^2} (1 - e^{-pt_1} - pt_1 e^{-pt_n}).$$

**6.59р.** Изображение периодической импульсной последовательности  $F(p)$  можно найти как сумму изображений одинаковых одиночных импульсов с учетом их сдвига по оси времени с помощью теоремы запаздывания:

$$\begin{aligned} F(p) &= F_1(p) + F_1(p)e^{-pT} + F_1(p)e^{-2pT} + F_1(p)e^{-3pT} + \dots = \\ &= F_1(p)(1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + e^{-3pT} + \dots). \end{aligned}$$

Множитель при  $F_1(p)$  представляет собой разложение функции  $(1 - e^{-pT})^{-1}$  в бесконечный ряд. Поэтому  $F(p) = F_1(p)(1 - e^{-pT})^{-1}$ .

**6.63м.** Представьте каждую из заданных функций времени как сумму двух периодических ( $t > 0$ ) последовательностей импульсов. Первая последовательность состоит из импульсов положительной полярности, а вторая из импульсов отрицательной полярности. Учтите сдвиг второй последовательности относительно первой вправо по оси времени, а также результат решения задачи 6.59р.

**6.64р.** Операторный коэффициент передачи цепи по напряжению

$$K(p) = \{pC[R + 1/(pC)]\}^{-1} = [\tau(p + 1/\tau)]^{-1}; \quad \tau = RC.$$

Зная изображение импульса входного напряжения (см. задачу 6.58р)  $U_1(p) = \frac{E}{Tp^2}(1 - e^{-pT})^2$ , найдем изображение выходного напряжения

$$U_2(p) = K(p)U_1(p) = \frac{E}{T\tau p^2} \left( p + \frac{1}{\tau} \right)^{-1} (1 - 2e^{-pT} + e^{-2pT}).$$

Для истолкования полученного результата используем теорему запаздывания. Согласно этой теореме  $f(t - t_0) \doteq F(p)e^{-pt_0}$ ,  $f(t) \doteq F(p)$ . Следовательно, выражение для напряжения  $u_2(t)$  содержит три составляющие. Изображение первой составляющей  $\frac{E}{T\tau} \left[ p^2 \left( p + \frac{1}{\tau} \right) \right]^{-1}$ . Вторая составляющая сдвинута относительно первой вправо по оси времени на  $T$  и имеет дополнительный множитель  $-2$ , третья сдвинута относительно первой на  $2T$ . Учитывая, что  $\frac{1}{p^2(p+a)} \doteq \frac{1}{a^2}(e^{-at} + at - 1)$ , можно записать

$$u_2(t) = f(t) = \frac{E\tau}{T} \left[ e^{-t/\tau} + \frac{t}{\tau} - 1 \right] \quad \text{при } 0 < t \leq T;$$

$$u_2(t) = f(t) - 2f(t - T) \quad \text{при } T < t \leq 2T;$$

$$u_2(t) = f(t) - 2f(t - T) + f(t - 2T) \quad \text{при } t > 2T.$$

**6.65м.** Изображение входного напряжения в виде периодической последовательности треугольных импульсов имеет вид (см. задачу 6.60)

$$U_1(p) = \frac{E}{Tp^2} - \frac{E}{p} \frac{e^{-pT}}{1 - e^{-pT}}$$

Для данной задачи это выражение целесообразно преобразовать:

$$U_1(p) = \frac{E}{Tp^2} - \frac{E}{p} (e^{-pT} + e^{-2pT} + e^{-3pT} + e^{-4pT} + \dots).$$

Умножив  $U_1(p)$  на операторный коэффициент передачи цепи по напряжению  $K(p)$ , найдем изображение выходного напряжения  $U_2(p)$ . Полученное выражение для  $U_2(p)$  содержит составляющие с множителями вида  $e^{-pTn}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Вклад этих составляющих в итоговый результат для  $u_2(t)$  определяется тем же способом, что и в задаче 6.64р.

**6.66м.** См. решение задачи 6.64р.

**6.67м, 6.68м.** Изображение входного воздействия в обеих задачах имеет вид  $F(p) = \frac{A}{p}(1 - e^{-pt_{и}})$ . Наличие компоненты  $F_1(p) = \frac{A}{p}e^{-pt_{и}}$  приводит к появлению в конечном выражении для реакции цепи при  $t > t_{и}$  составляющей, сдвинутой относительно начала отсчета времени  $t = 0$  на  $t_{и}$  (см. задачу 6.64р). При определенных условиях эта составляющая может обращать все выражение в нуль.

Для физической интерпретации полученного результата целесообразно представить входное воздействие как сумму двух скачков: положительного и сдвинутого по времени на  $t_{и}$  отрицательного того же значения. Реакцию цепи определяют как сумму реакций на каждый из скачков. При поступлении скачка на вход цепи в ней возникают незатухающие гармонические колебания. Заметим, что рассматриваемые цепи являются дуальными, и результат решения одной задачи может быть перенесен на другую.

**6.69р.** Изображение входного напряжения  $U(p)$  можно определить с помощью результатов решения задачи 6.60:

$$U(p) = E(1 - e^{-pt_{и}})[p(1 - e^{-pT})]^{-1}.$$

Операторная входная проводимость цепи  $Y(p) = (pL + R)^{-1}$ .

Изображение тока цепи по закону Ома в операторной форме  $I(p) = Y(p)U(p)$ . Для перехода от изображения тока  $I(p)$  к оригиналу  $i(t)$  нужно вычислить сумму вычетов функции

$$F(p) = I(p)e^{pt} = E(1 - e^{-pt_{и}})e^{pt}[p(1 - e^{-pT})(pL + R)]^{-1}$$

во всех ее полюсах. Число полюсов функции  $F(p)$  бесконечно, поскольку уравнение  $1 - e^{-pT} = 0$  имеет бесконечное число корней  $p_k = j\frac{2\pi k}{T}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Поэтому выражение для тока получится в виде бесконечного ряда, из которого следует выделить вынужденную составляющую. Сделать это нелегко. Поэтому при решении этой задачи целесообразно использовать метод отделения свободной составляющей реакции от вынужденной (см. задачу 6.49р). Свободная составляющая определится как сумма вычетов функции  $F(p) = I(p)e^{pT}$  в полюсах операторной входной проводимости  $Y(p)$ . В рассматриваемой задаче  $Y(p)$  имеет один полюс  $p_1 = -R/L$ . Следовательно,

$$i_{\text{св}} = \operatorname{Res}_{p_1} F(p) = E \left. \frac{(1 - e^{-pt_n})e^{pt}}{pL(1 - e^{-pT})} \right|_{p=p_1} = -\frac{E}{R} \frac{e^{t_n/\tau} - 1}{e^{T/\tau} - 1} e^{-t/\tau},$$

где  $\tau = L/R$  — постоянная времени цепи.

Если известна формула для переходного тока цепи  $i$ , то искомая вынужденная составляющая тока  $i_{\text{вын}} = i - i_{\text{св}}$ .

Трудности, возникающие при отыскании тока  $i$  непосредственно по изображению  $I(p)$ , отмечены ранее. Существует, однако, прием, делающий излишним нахождение выражения для реакции цепи на бесконечную последовательность импульсов напряжения. Действительно, реакция цепи на эту последовательность на интервале  $0 \leq t < T$  (см. рис. Т6.40) имеет смысл реакции цепи на первый импульс этой последовательности. Реакция цепи на одиночный импульс может быть найдена сравнительно легко.

Если из полученного результата вычесть уже известную свободную составляющую, то можно определить вынужденную составляющую тока, что и было целью решения. При этом решение получается в замкнутом виде, а не в виде бесконечного ряда. Запишем выражение для реакции цепи на первый импульс напряжения заданной бесконечной последовательности, воспользовавшись результатом решения задачи 6.47р:

$$i = \begin{cases} \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau}) & \text{при } 0 \leq t < t_n, \tau = L/R, \\ \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau}) - \frac{E}{R}[1 - e^{-(t-t_n)/\tau}] & \text{при } t_n \leq t < T. \end{cases}$$

Вычтем свободную составляющую тока  $i_{\text{св}}$ . После несложных преобразований получим

$$i_{\text{вын}} = \begin{cases} \frac{E}{R} \left[ 1 - \frac{1 - e^{-(T-t_n)/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} e^{-t/\tau} \right] & \text{при } 0 \leq t < t_n, \\ \frac{E}{R} \frac{1 - e^{-t_n/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} e^{-(t-t_n)/\tau} & \text{при } t_n \leq t < T. \end{cases}$$

Поскольку эти формулы определяют реакцию цепи в стационарном (установившемся) режиме, время  $t$  в них можно отсчитывать с момента начала любого периода колебаний.

Ток цепи является одновременно током через индуктивность и, следовательно, изменяется во времени непрерывно. Поэтому верхние границы указанных в полученных формулах временных интервалов ( $t = t_n$  и  $t = T$  соответственно)

могут быть включены в эти интервалы. Первая формула для  $i_{\text{вын}}$  при  $t = 0$  и вторая при  $t = T$  дают один и тот же результат

$$i_{\text{вын}}(0) = i_{\text{вын}}(T) = \frac{E}{R} e^{-T/\tau} (e^{t_u/\tau} - 1)(1 - e^{-T/\tau})^{-1},$$

что можно рассматривать и как проверку на периодичность, и как одно из доказательств правильности решения.

**6.71м.** Задача решается аналогично задаче 6.69р. Изображение напряжения  $U_C(p)$  определяется по изображению входного воздействия  $U(p)$  и операторному коэффициенту передачи цепи по напряжению  $K(p)$ :  $U_C(p) = K(p)U(p)$ .

Свободная составляющая напряжения на емкости находится как вычет функции  $U_C(p)e^{pt}$  в полюсе коэффициента передачи  $K(p)$ . Если  $K(p)$  имеет несколько полюсов, то следует брать сумму вычетов во всех полюсах. (Сравните с задачами 6.49р и 6.69р, в которых вычеты берут в полюсах другой операторной характеристики цепи — входной проводимости, поскольку отыскивают токи, а не напряжение, как в этой задаче.)

**6.72р.** Пусть  $u_1(t) \doteq U_1(p)$ . Тогда в соответствии с теоремой запаздывания  $u_2(t) = u_1(t - t_0) \doteq U_1(p)e^{-pt_0}$ . Отсюда  $K(p) = U_2(p)/U_1(p) = e^{-pt_0}$ . Цепь с таким  $K(p)$  физически не осуществима. Действительно, комплексный коэффициент передачи цепи по напряжению  $K(j\omega) = K(p)|_{p=j\omega} = 1 \cdot e^{-j\omega t_0}$ .

Следовательно, АЧХ цепи должна быть равномерной, а ФЧХ — линейной в неограниченном диапазоне частот. Реальные элементы цепей всегда обладают некоторыми паразитными индуктивностями и емкостями, поэтому частотные характеристики реальных цепей не имеют указанных свойств.

### 6.3. Единичные функции и их свойства

**6.73.** Функция  $F(t)$  задана в виде

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ t^3 & \text{при } 0 \leq t < 1, \\ t^2 + 3 & \text{при } 1 \leq t < \infty. \end{cases}$$

Получите для этой функции с помощью единичных функций единое аналитическое выражение при  $-\infty < t < \infty$ .

**6.74.** Найдите первую производную функции, заданной в задаче 6.73, в виде единого аналитического выражения при  $-\infty < t < \infty$ .

**6.75.** Получите аналитическое описание одиночных импульсов (см. рис. Т6.34,  $a - d$ ) с помощью единичных функций.

**6.76.** Выразите функцию  $\delta(at)$  ( $a = \text{const} \neq 0$ ) через  $\delta(t)$ .

**6.77.** Выразите функции  $\delta(t_0 - t)$  и  $1(t_0 - t)$  через  $\delta(t - t_0)$  и  $1(t - t_0)$ .

**6.78м.** Найдите производные следующих функций:

а)  $5 \cdot 1(t - 0,1)$ ; б)  $(1 - e^{-at}) \cdot 1(t)$ ; в)  $2 \sin \omega t \cdot 1(t)$ ; г)  $e^{-at} \cdot 1(t)$ ; д)  $2 \cos \omega t \cdot 1(t)$ .

**6.79м.** Упростите подынтегральные выражения в интегралах:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} (t^3 + 4)\delta(t + 2)dt; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^6 (t^2 + 2)\delta(t + 5)dt;$$

$$\text{в) } \int_{-5}^6 (t^2 - t - 2)\delta(t - 3)dt.$$

**6.80м.** Вычислите следующие интегралы: а)  $\int_{-\infty}^{\infty} t\delta(t - \theta)dt$ ;

б)  $\int_{\frac{2}{2}}^{\frac{5}{5}} t^2\delta(t - 3)dt$ ; в)  $\int_{\frac{3}{3}}^{\frac{3}{3}} t^2\delta(t - 5)dt$ ; г)  $\int_{-\infty}^t 5\delta(t - 5)dt$ .

**6.81м.** Выразите функцию  $\text{sign}(t) = t/|t|$  через единичную функцию  $1(t)$ .

**6.82м.** Найдите первую и вторую производные функции  $f(t) = |t|$ .

**6.83м.** Вычислите интеграл  $\int_{-\infty}^t 1(t)dt$ .

**6.84м.** Вычислите интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t - a)dt$ .

**6.85р.** Функция  $F(t)$  задана графиком рис. Т6.48. Покажите, что эта функция может быть преобразована в  $\delta$ -функцию в результате предельного перехода  $\lim_{m \rightarrow \infty} F(t) = \delta(t)$ .

**6.86р.** Используя результаты предыдущей задачи, пока-

жите, что  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d\delta(t)}{dt}$ . На основании анализа поведения функции  $dF(t)/dt$  при возрастании параметра  $m$  сформулируйте свойства первой производной  $\delta$ -функции.

**6.87р.** Решите задачи 6.85р и 6.86р для функции  $F(t) = \frac{m}{\pi} \frac{1}{1 + (mt)^2}$ , где  $m > 0$ .

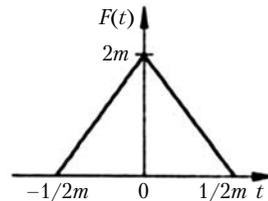


Рис. Т6.48

**6.88.** Решите задачи 6.85р и 6.86р для функции  $F(t) = \frac{m}{\sqrt{\pi}} e^{-(mt)^2}$ , где  $m > 0$ .

**6.89м.** Найдите изображения по Лапласу следующих функций: а)  $\delta(t - a)$ ; б)  $\delta'(t)$ ; в)  $\delta'(t - a)$ ; г)  $\delta^{(n)}(t - a)$ .

### Решения и методические указания

**6.78м.** Используйте соотношение

$$\frac{d}{dt}[f(t) \cdot 1(t - t_0)] = f(t_0)\delta(t - t_0) + \frac{df(t)}{dt} \cdot 1(t - t_0).$$

Пусть, например, нужно найти производную функции  $e^{-at} \cdot 1(t)$ .

Очевидно, что  $t_0 = 0$ ;  $e^{-at}|_{t=0} = 1$ ;  $\frac{d}{dt}e^{-at} = -ae^{-at}$ .

В результате получим

$$\frac{d}{dt}[e^{-at} \cdot 1(t)] = \delta(t) - ae^{-at} \cdot 1(t).$$

**6.79м.** Используйте свойство  $\delta$ -функции:  $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$ . Пусть, например,  $f(t) = t^3 + 4$ ,  $t_0 = -2$ . Тогда  $f(t_0) = -4$ , следовательно,  $(t^3 + 4)\delta(t + 2) = -4\delta(t + 2)$ .

**6.80м.** Используйте фильтрующее свойство  $\delta$ -функции

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta(t - t_0)dt = \begin{cases} f(t_0) & \text{при } t_0 \in ]t_1, t_2[, \\ 0 & \text{при } t_0 \notin ]t_1, t_2[. \end{cases}$$

Пусть, например, задан интеграл  $\int_2^5 t^2\delta(t - 3)dt$ . Точка  $t_0 = 3$  принадлежит интервалу интегрирования  $f(t_0) = t_0^2 = 9$ , следовательно, значение интеграла равно 9. Аналогично получим  $\int_2^3 t^2\delta(t - 5)dt = 0$ .

**6.81м.** Постройте график функции  $2 \cdot 1(t) - 1$  и сравните его с графиком функции  $\text{sign}(t)$ .

**6.82м.** Выразите первую производную  $f'(t)$  через функцию  $\text{sign}(t)$ . Затем используйте результат решения задачи 6.81м, учитывая правило дифференцирования произведения вида  $\varphi(t) \cdot 1(t - t_0)$  (см. задачу 6.78м).

**6.83м.** С учетом свойств единичной функции [ $1(t) = 0$  при  $t < 0$ ] перейдите от заданного интеграла к интегралу на интервале  $t \geq 0$ , вычислите новый интеграл и затем проанализируйте график вспомогательной функции  $(t + |t|)/2$ .

**6.84м.** Примените правило интегрирования по частям и затем используйте правило вычисления интеграла вида

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta(t - t_0)dt \quad (\text{см. задачу 6.80м}).$$

**6.85р.** Согласно рис. Т6.48 интеграл от  $F(t)$  в бесконечных пределах равен площади равнобедренного треугольника с основанием  $1/m$  и высотой  $2m$ , т.е.  $\int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt = 1$  при любых  $m$ .

При  $m \rightarrow \infty$  интервал  $\frac{-1}{2m} < t < \frac{1}{2m}$ , на котором функция  $F(t) \neq 0$ , стягивается в точку  $t = 0$ ,  $F(t)|_{t=0} = \infty$ . Таким образом,  $F(t) = 0$  при  $t \neq 0$  и  $F(t) = \infty$  при  $t = 0$ , причем  $\int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt = 1$ , т.е. свойства функции  $F(t)$  при  $m \rightarrow \infty$  совпадают с известными свойствами  $\delta$ -функции. Следовательно,  $\lim_{m \rightarrow \infty} F(t) = \delta(t)$ .

**6.86р.** Из рис. Т6.48 очевидно, что производная  $F'(t)$  при  $0 < t \leq \frac{1}{2m}$  равна  $-4m^2$ , а при  $\frac{-1}{2m} \leq t < 0$  равна  $4m^2$ . При  $m \rightarrow \infty$  производная  $F'(t)$  обращается в нуль везде, кроме точки  $t = 0$ , причем  $F'(t)|_{t=0_-} = +\infty$ ;  $F'(t)|_{t=0_+} = -\infty$ . Как было показано в предыдущей задаче,  $\lim_{m \rightarrow \infty} F(t) = \delta(t)$ . Поэтому можно записать  $\lim_{m \rightarrow \infty} F'(t) = \delta'(t)$ , следовательно,

$$\delta'(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0, \\ +\infty & \text{при } t = 0_-, \\ -\infty & \text{при } t = 0_+. \end{cases}$$

В данной задаче в качестве модели для выявления свойств первой производной функции  $\delta(t)$  была использована функция  $F(t)$ , заданная графиком на рис. Т6.48. Для этой цели допустимо использовать и другие функции, в чем можно убедиться при решении двух следующих задач.

**6.87р.** При  $t \neq 0$  и достаточно больших значениях параметра  $m$ , таких что  $(mt)^2 \gg 1$ , функция  $F(t) \approx 1/(\pi mt^2)$ . Следовательно, эта функция изменяется в зависимости от аргумента  $t$  как  $1/t^2$ , т.е. достаточно быстро. При  $t = 0$ ,  $F(t) = m/\pi$ , поэтому при  $m \rightarrow \infty$   $F(0) \rightarrow \infty$ .

Интеграл от  $F(t)$  в бесконечных пределах

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{\pi} \frac{1}{1 + (mt)^2} dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} mt \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

при любом  $m \neq 0$ . Учитывая совокупность выявленных свойств функции  $F(t)$ , можно утверждать, что  $\lim_{m \rightarrow \infty} F(t) = \delta(t)$ .

Найдем производную функции  $F(t)$ :

$$F'(t) = \frac{-2m^3}{\pi} \frac{t}{[1 + (mt)^2]^2}.$$

Нетрудно показать, что при  $t = t_1 = -1/m\sqrt{3} \approx -0,5774/m$  функция  $F'(t)$  имеет максимум, а при  $t = t_2 = -t_1$  — минимум, причем  $F'(t_1) = -F'(t_2) = \frac{-9m^2}{8\pi\sqrt{3}} = -0,2068m^2$ . График функции  $F'(t)$  приведен на рис. Т6.49. Как показано в предыдущей задаче,  $\lim_{m \rightarrow \infty} F(t) = \delta(t)$ . Поэтому можно записать  $\lim_{m \rightarrow \infty} F'(t) = \delta'(t)$ .

Свойства первой производной  $\delta$ -функции становятся наглядными при мысленном преобразовании графика рис. Т6.49 для  $m \rightarrow \infty$ . Следует учесть, что после прохождения экстремумов при  $t = t_1$ ,  $t = t_2$  и достаточно больших  $t$  ( $m^2 t^2 \gg 1$ ) функция  $F'(t)$  изменяется как  $1/|t^3|$ . Таким образом,

$$\delta'(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0, \\ +\infty & \text{при } t = 0_-, \\ -\infty & \text{при } t = 0_+. \end{cases}$$

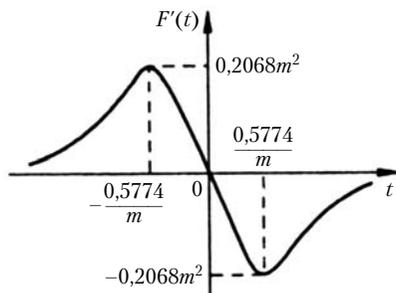


Рис. Т6.49

**6.89м.** Используйте теорему дифференцирования оригинала и теорему смещения.

#### 6.4. Временные характеристики простейших цепей

**6.90р.** Определите переходные  $g(t)$  и импульсные  $h(t)$  характеристики<sup>1</sup> простейшей  $RL$ -цепи (рис. Т6.50) для сле-

<sup>1</sup> Во всех задачах этого параграфа, исключая задачи 6.102м, 6.103м, переходные и импульсные характеристики цепей определяются в режиме холостого хода на выходе цепей.

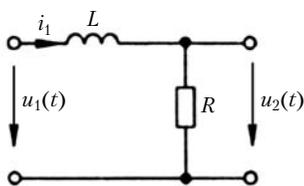


Рис. Т6.50

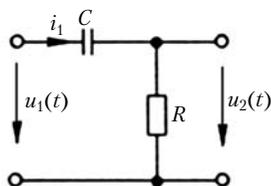


Рис. Т6.51

дующих случаев: а) внешнее воздействие — напряжение  $u_1$ , реакция — ток  $i_1$ ; б) внешнее воздействие — напряжение  $u_1$ , реакция — напряжение  $u_2$ .

**6.91.** Определите переходную  $g(t)$  и импульсную  $h(t)$  характеристики простейшей  $RC$ -цепи (рис. Т6.51), если  $R = 1$  кОм;  $C = 1$  мкФ (внешнее воздействие — напряжение  $u_1$ , реакция — ток  $i_1$ ).

**6.92р.** Найдите переходную  $g(t)$  и импульсную  $h(t)$  характеристики двухзвенной  $RL$ -цепи (рис. Т6.52). Внешнее воздействие и реакция — напряжения  $u_1, u_2$ . Параметры элементов цепи:  $R = 1$  кОм;  $L = 1$  Гн.

**6.93.** Определите переходную  $g(t)$  и импульсную  $h(t)$  характеристики двухзвенной  $RC$ -цепи (рис. Т6.53). Внешнее воздействие и реакция — напряжения  $u_1, u_2$ . Параметры элементов цепи:  $R = 1$  кОм;  $C = 2$  мкФ.

**6.94.** Найдите переходную  $g(t)$  и импульсную  $h(t)$  характеристики двухзвенной  $RL$ -цепи (рис. Т6.54). Внешнее воздействие и реакция — напряжения  $u_1, u_2$ . Параметры элементов цепи:  $R = 1$  кОм;  $L = 2$  Гн.

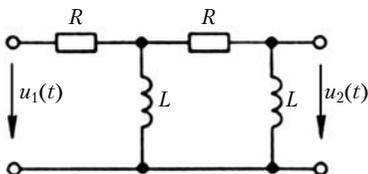


Рис. Т6.52

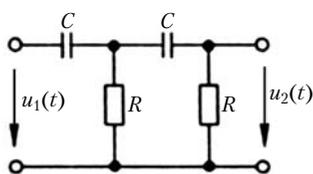


Рис. Т6.53

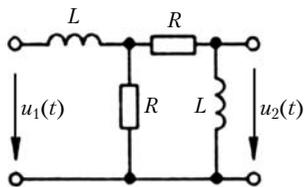


Рис. Т6.54

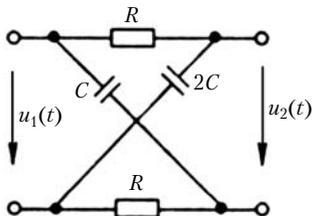


Рис. Т6.55

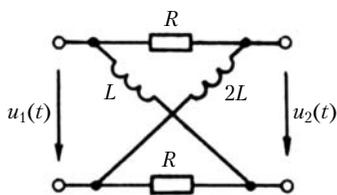


Рис. Т6.56

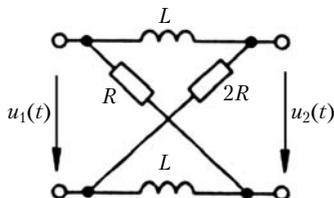


Рис. Т6.57

**6.95м.** Определите переходную  $g(t)$  и импульсную  $h(t)$  характеристики мостовой  $RC$ -цепи (рис. Т6.55). Внешнее воздействие и реакция — напряжения  $u_1, u_2$ . Параметры элементов цепи:  $R = 1$  кОм;  $C = 1$  мкФ. Объясните ход характеристики  $g(t)$  на основании физических соображений.

**6.96.** Найдите переходную  $g(t)$  и импульсную  $h(t)$  характеристики мостовой  $RL$ -цепи (рис. Т6.56). Внешнее воздействие и реакция — напряжения  $u_1, u_2$ . Параметры элементов цепи:  $R = 1$  кОм;  $L = 1$  Гн.

**6.97.** Решите предыдущую задачу для цепи рис. Т6.57.

**6.98м.** На вход некоторой цепи с нулевыми начальными условиями в момент времени  $t = 0$  подают экспоненциально убывающее напряжение  $u_1(t) = 2e^{-500t}$  В. Выходное напряжение  $u_2(t) = 4e^{-500t} - 4e^{-10^3t}$  В. Найдите переходную характеристику цепи.

**6.99.** Решите предыдущую задачу, если  $u_2(t) = 4e^{-500t} - 2e^{-250t}$  В.

**6.100.** Определите переходную  $g(t)$  и импульсную  $h(t)$  характеристики  $RLC$ -цепи (рис. Т6.58) при  $R > 0,5\sqrt{L/C}$ . Внешнее воздействие — напряжение  $u_1$ , реакция — напряжение  $u_2$ .

**6.101.** Решите предыдущую задачу, если  $R = 0,5\sqrt{L/C}$ . Найдите момент времени  $t_0$ , соответствующий максимуму переходной характеристики  $g(t)$ , и значение этого максимума  $g(t_0)$ .

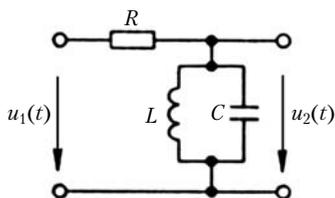


Рис. Т6.58

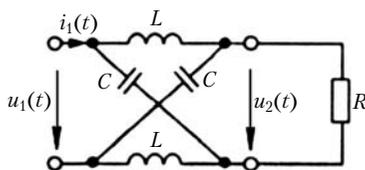


Рис. Т6.59

**6.102м.** Симметричная мостовая цепь нагружена на сопротивление  $R = \sqrt{L/C}$  (рис. Т6.59). Определите переходную  $g(t)$  и импульсную  $h(t)$  характеристики цепи для следующих случаев: а) внешнее воздействие —

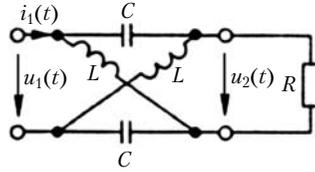


Рис. Т6.60

напряжением  $u_1$ , реакция — ток  $i_1$ ; б) внешнее воздействие — напряжением  $u_1$ , реакция — напряжением  $u_2$ . Дайте физическую интерпретацию полученным результатам.

**6.103м.** Решите предыдущую задачу для цепи, схема которой представлена на рис. Т6.60.

### Решения и методические указания

**6.90р.** а) Переходная характеристика цепи  $g(t)$  численно равна реакции цепи на воздействие единичного скачка тока или напряжения. Размерность переходной характеристики равна отношению размерностей реакции и воздействия. В рассматриваемом случае переходная характеристика цепи численно равна входному току цепи  $i_1(t)$  при  $u_1(t) = 1(t)$  В и имеет размерность проводимости. Учитывая, что  $1(t) \doteq p^{-1}$ , найдем изображение входного тока цепи:

$$I_1(p) = \frac{U_1(p)}{Z(p)} = \frac{1}{pZ(p)} = \frac{1}{L[p(p + R/L)]^{-1}}.$$

Переходя от изображения к оригиналу с помощью соотношения  $[p(p + a)]^{-1} \doteq (1/a)(1 - e^{-at})$ , получим переходную характеристику цепи:

$$g(t) = \frac{1}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \text{ См.}$$

Импульсная характеристика цепи  $h(t)$  численно равна реакции цепи на воздействие единичного импульса тока или напряжения. Размерность импульсной характеристики равна отношению размерности реакции к размерности произведения воздействия на время. В рассматриваемом случае импульсная характеристика цепи численно равна входному току цепи  $i_1(t)$  при  $u_1(t) = \delta(t)$  и имеет размерность  $\text{См} \cdot \text{с}^{-1}$ .

Учитывая, что  $\delta(t) \doteq 1$ , определим изображение входного тока цепи:

$$I_1(p) = \frac{U_1(p)}{Z(p)} = \frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{L} \frac{1}{p + R/L}.$$

Переходя от изображения к оригиналу с помощью соотношения  $(p + a)^{-1} \doteq e^{-at}$ , найдем импульсную характеристику цепи:  $h(t) = \frac{1}{L} e^{-Rt/L} \text{См} \cdot \text{с}^{-1}$ .

Легко убедиться, что такое же выражение для  $h(t)$  можно получить, используя известное соотношение между переходной  $g(t)$  и импульсной  $h(t)$  характеристиками цепи:

$$h(t) = g(0)\delta(0) + 1(t) \frac{d}{dt} g(t).$$

б) Поскольку  $u_2 = i_1 R$ , можно сразу записать

$$g(t) = 1 - e^{-Rt/L}; \quad h(t) = \frac{R}{L} e^{-Rt/L} \text{с}^{-1}.$$

**6.92р.** Операторный коэффициент передачи по напряжению двухзвенной цепи (рис. Т6.61)

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \left[ \left( 1 + \frac{Z_1(p)}{Z_2(p)} \right) \left( 1 + \frac{Z_3(p)}{Z_4(p)} \right) + \frac{Z_1(p)}{Z_4(p)} \right]^{-1}.$$

Для данной задачи  $Z_1(p) = Z_3(p) = R$ ;  $Z_2(p) = Z_4(p) = pL$ , поэтому

$$K(p) = (p\tau)^2 [(p\tau)^2 + 3p\tau + 1]^{-1},$$

где  $\tau = L/R$  — постоянная времени цепи.

Изображение переходной характеристики  $g(t)$  и коэффициент передачи  $K(p)$  связаны известным соотношением  $g(t) \doteq K(p)/p$ , откуда  $g(t) \doteq p\tau^2 [(p\tau)^2 + 3p\tau + 1]^{-1}$ .

Эта функция имеет два полюса:  $p_1 = -2,618/\tau$ ;  $p_2 = -0,382/\tau$ , поэтому можно записать

$$g(t) \doteq \frac{p}{(p + 2,618/\tau)(p + 0,382/\tau)}.$$

Для перехода к оригиналу воспользуемся соотношением  $p[(p + a)(p + b)]^{-1} \doteq (b - a)^{-1}(be^{-bt} - ae^{-at})$ . В результате получим  $g(t) = 1,17e^{-2,618t/\tau} - 0,17e^{-0,382t/\tau}$ .

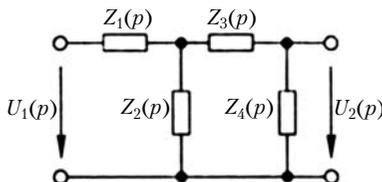


Рис. Т6.61

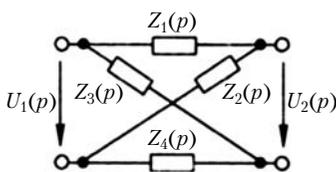


Рис. Т6.62

Построим график переходной характеристики  $g(t)$  и убедимся, что при  $t/\tau > 0,9$  кривая  $g(t)$  заходит в область отрицательных значений.

Импульсную характеристику цепи  $h(t)$  найдем по переходной характеристике:

$$h(t) = g(0)\delta(t) + 1(t) \frac{dg(t)}{dt} = \delta(t) - \frac{3,063}{\tau} e^{-2,618t/\tau} + \frac{0,065}{\tau} e^{-0,382t/\tau} c^{-1}.$$

**6.95м.** Эту задачу решают аналогично задаче 6.92р. Приведем выражение для операторного коэффициента передачи по напряжению мостовой цепи общего вида (рис. Т6.62):

$$K(p) = \frac{Z_2(p)Z_3(p) - Z_1(p)Z_4(p)}{[Z_4(p) + Z_2(p)][Z_3(p) + Z_1(p)]}.$$

**6.98м.** Найдите изображения входного и выходного напряжений  $U_1(p)$  и  $U_2(p)$  и по ним операторный коэффициент передачи цепи по напряжению  $K(p)$ . Переходную характеристику цепи определите с помощью соотношения  $g(t) \doteq K(p)/p$ .

**6.102м, 6.103м.** Это однотипные задачи. Изображение входного тока цепи  $I_1(p)$  определите по изображению входного напряжения  $U_1(p) = p^{-1}$  и операторному входному сопротивлению  $Z_{вх}(p)$ . Изображение выходного напряжения найдите по  $U_1(p)$  и операторному коэффициенту передачи цепи по напряжению  $K(p)$ . Приведем выражения для  $Z_{вх}(p)$  и  $K(p)$  симметричной мостовой цепи с нагрузкой (рис. Т6.63):

$$Z_{вх}(p) = R \frac{N(p)}{Z_1(p) + Z_2(p) + 2R};$$

$$K(p) = \frac{Z_2(p) - Z_1(p)}{N(p)};$$

$$N(p) = Z_1(p) + Z_2(p) + 2Z_1(p)Z_2(p)R^{-1}.$$

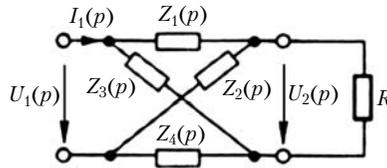


Рис. Т6.63

В обеих задачах  $Z_1(p)Z_2(p) = R^2$ .

### 6.5. Применение интеграла Дюамеля

**6.104р.** По известной переходной характеристике цепи  $g(t)$  найдите ее реакцию  $s(t)$  на внешнее воздействие  $x(t)$ , определяемое графиками, приведенными на рис. Т6.64,  $a - z$ .

**6.105р.** Переходная характеристика цепи, рассмотренной в задаче 6.91,  $g(t) = 10^{-3}e^{-10^3 t}$  См. Найдите реакцию этой цепи на воздействие напряжения

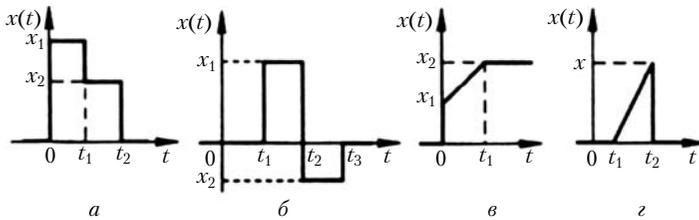


Рис. Т6.64

$$u = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ u_1 = \frac{100}{t_1}t \text{ В} & \text{при } 0 \leq t < t_1 = 10^{-3} \text{ с}, \\ u_1 = 100 \text{ В} & \text{при } t_1 \leq t < \infty. \end{cases}$$

**6.106р.** Определите реакцию цепи, рассмотренной в задаче 6.105р, на заданное воздействие по известной импульсной характеристике  $h(t) = 10^{-3}\delta(t) - e^{-10^3t} \text{ См} \cdot \text{с}^{-1}$ .

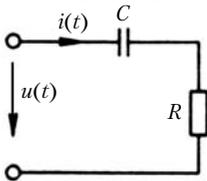


Рис. Т6.65

**6.107.** Напряжение на входе последовательной  $RC$ -цепи (рис. Т6.65) изменяется по следующему закону:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 100(1 - e^{-10^3t}) \text{ В} & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Параметры элементов цепи:  $R = 1 \text{ кОм}$ ;  $C = 2 \text{ мкФ}$ . Найдите ток цепи  $i(t)$ .

**6.108р.** Связь между воздействием  $x(t)$  на цепь, ее откликом  $s(t)$  и переходной характеристикой  $g(t - t_0)$  определяется интегралом Дюамеля:

$$s(t) = x(t_0)g(t - t_0) + \int_0^t x'(\theta)g(t - \theta)d\theta,$$

или

$$s(t) = x(t_0)g(t - t_0) + \int_0^t x'(t - \theta)g(\theta)d\theta,$$

где

$$x'(\theta) = \frac{dx(\theta)}{d\theta} = \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=\theta}; \quad x'(t - \theta) = \frac{dx(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=t-\theta}.$$

Покажите, что интеграл Дюамеля может иметь следующие формы записи:

$$\text{а) } s(t) = x(t)g(0) + \int_0^t x(\theta)[g(t - \theta)]'d\theta; \quad [g(t - \theta)]' = \frac{dg(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=t-\theta};$$

$$\text{б) } s(t) = x(t)g(0) + \int_0^t x(t-\theta)[g(\theta)]'d\theta; \quad [g(\theta)]' = \left. \frac{dg(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\theta}.$$

Чем следует руководствоваться при выборе той или иной формы интеграла Дюамеля?

**6.109.** Простейшую  $RL$ -цепь (рис. Т6.66) в момент времени  $t = 0$  подключают к источнику экспоненциально убывающего напряжения  $u_1 = Ee^{-at}$ . Найдите напряжение  $u_2(t)$  с помощью переходной характеристики цепи.

**6.110.** Решите предыдущую задачу, используя импульсную характеристику цепи.

**6.111р.** Простейшую  $LC$ -цепь без потерь подключают к источнику линейно возрастающего напряжения  $u(t) = kt$ , где  $k$  — постоянный вещественный коэффициент (рис. Т6.67). Найдите напряжения  $u_L(t)$  и  $u_C(t)$  с помощью переходной характеристики цепи.

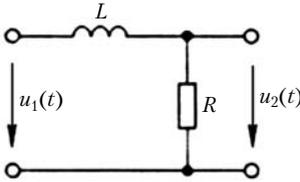


Рис. Т6.66

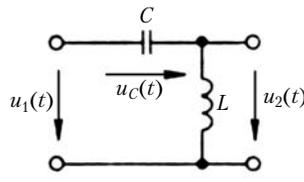


Рис. Т6.67

**6.112.** Решите предыдущую задачу, используя импульсную характеристику цепи.

**6.113.** Переходная характеристика коэффициента передачи по напряжению  $g(t)$   $RC$ -цепи второго порядка известна:  $g(t) = 1 - e^{-t/\tau} - e^{-t/2\tau}$ , где  $\tau = RC$  — постоянная времени цепи. На входе цепи действует напряжение

$$u_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 + \cos \omega_0 t & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Найдите напряжение  $u_2(t)$  на выходе цепи.

**6.114.** Решите предыдущую задачу, используя импульсную характеристику цепи.

### Решения и методические указания

**6.104р.** Внешнее воздействие описывается сложной функцией, имеющей различные аналитические выражения для различных интервалов времени:

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & \text{при } t_0 \leq t < t_1, \\ x_2(t) & \text{при } t_1 \leq t < t_2, \\ x_3(t) & \text{при } t_2 \leq t < t_3, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Эта функция может иметь конечные разрывы в точках  $t_0, t_1, t_2, \dots$

Для нахождения реакции цепи на воздействие такого типа воспользуемся одной из форм интеграла Дюамеля; при этом реакцию цепи определим для каждого интервала времени в отдельности.

На первом интервале ( $t_0 \leq t < t_1$ )

$$s(t) = x_1(t_0)g(t - t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dx_1}{dt} \Big|_{t=\theta} g(t - \theta)d\theta;$$

на втором интервале ( $t_1 \leq t < t_2$ )

$$s(t) = x_1(t_0)g(t - t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{dx_1}{dt} \Big|_{t=\theta} g(t - \theta)d\theta + [x_2(t_1) - x_1(t_1)]g(t - t_1) + \int_{t_1}^t \frac{dx_2}{dt} \Big|_{t=\theta} g(t - \theta)d\theta.$$

Аналогичным образом найдем реакцию цепи  $s(t)$  и на всех последующих интервалах времени.

Для рис. Т6.64, а

$$s(t) = x_1g(t) \text{ при } 0 \leq t < t_1;$$

$$s(t) = x_1g(t) + (x_2 - x_1)g(t - t_1) \text{ при } t_1 \leq t < t_2;$$

$$s(t) = x_1g(t) + (x_2 - x_1)g(t - t_1) - x_2g(t - t_2) \text{ при } t \geq t_2.$$

Для рис. Т6.64, б

$$s(t) = x_1g(t - t_1) \text{ при } t_1 \leq t < t_2;$$

$$s(t) = x_1g(t - t_1) + (x_1 + x_2)g(t - t_2) \text{ при } t_2 \leq t < t_3;$$

$$s(t) = x_1g(t - t_1) + (x_1 + x_2)g(t - t_2) + x_2g(t - t_3) \text{ при } t \geq t_3.$$

Для рис. Т6.64, в

$$s(t) = x_1g(t) + \frac{x_2 - x_1}{t_1} \int_0^t g(t - \theta)d\theta \text{ при } 0 \leq t < t_1;$$

$$s(t) = x_1g(t) + \frac{x_2 - x_1}{t_1} \int_0^{t_1} g(t - \theta)d\theta \text{ при } t \geq t_1,$$

Для рис. Т6.64, з

$$s(t) = \frac{x}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^t g(t - \theta) d\theta \quad \text{при } t_1 \leq t < t_2;$$

$$s(t) = \frac{x}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} g(t - \theta) d\theta - xg(t - t_2) \quad \text{при } t \geq t_2.$$

**6.105р.** Разделим исследуемый промежуток времени  $0 \leq t < \infty$  на два интервала: 1)  $0 \leq t < t_1$ ; 2)  $t_1 \leq t < \infty$ . Определим реакцию цепи на заданное воздействие на каждом интервале времени.

На первом интервале ( $0 \leq t < t_1$ )

$$i(t) = \int_0^t \frac{du_1}{dt} \Big|_{t=\theta} g(t - \theta) d\theta.$$

Учитывая, что на этом интервале времени

$$\frac{du_1}{dt} \Big|_{t=\theta} = \frac{100}{t_1} = 10^5 \text{ В} \cdot \text{с}^{-1};$$

$$g(t - \theta) = 10^{-3} e^{-10^3(t-\theta)} \text{ СМ},$$

получим

$$i(t) = 10^2 \int_0^t e^{-10^3(t-\theta)} d\theta.$$

Вынося  $e^{-10^3 t}$  из-под знака интегрирования, так как эта величина не зависит от переменной  $\theta$ , и учитывая, что

$$i(t) = \int_0^t e^{10^3 \theta} d\theta = 10^{-3} (e^{10^3} - 1),$$

окончательно найдем

$$i(t) = 0,1(1 - e^{-10^3 t}) \text{ А при } 0 \leq t < t_1.$$

На втором интервале времени ( $t_1 \leq t < \infty$ )

$$i(t) = \int_0^{t_1} \frac{du_1}{dt} \Big|_{t=\theta} g(t - \theta) d\theta = 0,1 e^{-10^3 t} (e^{10^3 t_1} - 1) = 0,172 e^{-10^3 t} \text{ А}.$$

**6.106р.** Как и в задаче 6.105р, разделим исследуемый промежуток времени на два интервала: 1)  $0 \leq t < t_1$ ; 2)  $t_1 \leq t < \infty$ . Определим реакцию цепи на заданное воздействие на каждом интервале времени.

На первом интервале времени ( $0 \leq t < t_1$ )

$$i(t) = \int_0^t u_1(\theta)h(t - \theta)d\theta,$$

где

$$u_1(\theta) = \frac{100}{t_1}\theta = 10^5 \text{ В}; \quad h(t - \theta) = 10^{-3}\delta(t - \theta) - e^{-10^3(t-\theta)} \text{ См} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Представив интеграл, входящий в выражение для тока, в виде суммы двух интегралов

$$i(t) = 10^2 \int_0^t \theta \delta(t - \theta) d\theta - 10^5 e^{-10^3 t} \int_0^t \theta e^{10^3 \theta} d\theta$$

и учитывая, что

$$\int_0^t \theta \delta(t - \theta) d\theta = t; \quad \int_0^t \theta e^{10^3 \theta} d\theta = 10^{-6} [e^{10^3 t} (10^3 t - 1) + 1],$$

получим

$$i(t) = 0,1(1 - e^{-10^3 t}) \text{ А при } 0 \leq t < t_1.$$

На втором интервале ( $t_1 \leq t < \infty$ )

$$i(t) = \int_0^{t_1} u_1(\theta)h(t - \theta)d\theta + \int_{t_1}^t u_2(\theta)h(t - \theta)d\theta,$$

где  $u_2(\theta) = 100 \text{ В}$ .

Разбивая каждый из интегралов, входящих в это выражение, на два

$$i(t) = 10^2 \int_0^{t_1} \theta \delta(t - \theta) d\theta - 10^5 e^{-10^3 t} \int_0^{t_1} \theta e^{10^3 \theta} d\theta + \\ + 0,1 \int_{t_1}^t \delta(t - \theta) d\theta - 10^2 e^{-10^3 t} \int_{t_1}^t \theta e^{10^3 \theta} d\theta$$

и учитывая, что

$$\int_0^t \theta \delta(t - \theta) d\theta = 0; \quad \int_{t_1}^t \delta(t - \theta) d\theta = 1,$$

окончательно найдем

$$i(t) = 0,1 e^{-10^3 t} (e^{10^3 t_1} - 1) = 0,172 e^{-10^3 t} \text{ А при } t \geq t_1.$$

**6.108р.** а) Применим к интегралу, который стоит в исходном выражении, правило интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^t x'(\theta)g(t-\theta)d\theta &= x(\theta)g(t-\theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=t} - \int_0^t x(\theta)dg(t-\theta) = \\ &= x(t)g(0) - x(0)g(t) - \int_0^t x(\theta)dg(t-\theta). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$dg(t-\theta) = \frac{dg(t-\theta)}{d\theta} d\theta = -\frac{dg(t-\theta)d\theta}{d(t-\theta)} = -\frac{dg(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=t-\theta}^{d\theta},$$

найдем

$$\int_0^t x'(\theta)g(t-\theta)d\theta = x(t)g(0) - x(0)g(t) + \int_0^t x(\theta)[g(t-\theta)]'d\theta,$$

$$\text{где } [g(t-\theta)]' = \frac{dg(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=t-\theta}.$$

Подставив этот результат в исходную формулу интеграла Дюамеля, получим

$$s(t) = x(t)g(0) + \int_0^t x(\theta)[g(t-\theta)]'d\theta.$$

б) Заменяем интеграл в последнем выражении эквивалентным:

$$\int_0^t x(\theta)[g(t-\theta)]'d\theta = \int_0^t x(t-\theta)[g(\theta)]'d\theta.$$

В результате получим еще одну форму записи интеграла Дюамеля:

$$s(t) = x(t)g(0) + \int_0^t x(t-\theta)[g(\theta)]'d\theta,$$

$$\text{где } [g(\theta)]' = \frac{dg(\theta)}{d\theta} = \frac{dg(t)}{dt} \Big|_{t=\theta}.$$

Ту или иную форму записи интеграла Дюамеля выбирают, руководствуясь удобством и простотой выполнения вычислений. Следует отдать предпочтение той форме, для которой будет проще подынтегральное выражение, что зависит от условий конкретной задачи.

**6.111р.** Для отыскания переходной характеристики цепи  $g(t)$  найдем сначала операторный коэффициент передачи цепи по напряжению

$$K(p) = \frac{U_L(p)}{U(p)} = \frac{pL}{pL + 1/(pC)} = \frac{p^2}{p^2 + \omega_0^2},$$

где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  — резонансная частота последовательного колебательного контура.

Изображение переходной характеристики цепи  $g(t) \doteq K(p)/p = p/(p^2 + \omega_0^2)$ . Учтя, что  $p(p^2 + a^2)^{-1} \doteq \cos at$ , получим  $g(t) = \cos \omega_0 t$ .

Напряжение на индуктивности при  $t \geq 0$

$$u_L(t) = u(0)g(t) + \int_0^t u'(\theta)g(t - \theta)d\theta.$$

Так как  $u(0) = 0$ ;  $u'(\theta) = \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=\theta} = k$ , то

$$u_L(t) = k \int_0^t \cos \omega_0(t - \theta)d\theta = \frac{k}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Напряжение на емкости при известных напряжениях  $u(t)$  и  $u_L(t)$

$$u_C(t) = u(t) - u_L(t) = kt - \frac{k}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad \text{при } t \geq 0.$$

# Глава 7

## ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ И МНОГОПОЛЮСНИКОВ

### 7.1. Многополюсники и цепи с многополюсными элементами

**7.1.** Задана укороченная матрица проводимостей трехполюсника, включенного по схеме с общим выводом 3 (рис. Т7.1, а):

$$Y_{ij}^{(3)} = \begin{array}{|c|c|} \hline Y_{11}^{(3)} & Y_{12}^{(3)} \\ \hline Y_{21}^{(3)} & Y_{22}^{(3)} \\ \hline \end{array}$$

Определите матрицу проводимостей этого трехполюсника, включенного по схеме с общим выводом 2 (рис. Т7.1, б).

**7.2.** Трехполюсники, отличающиеся друг от друга только способом включения (см. задачу 7.1), нагружены на одинаковые сопротивления  $Z_n = Y_n^{-1}$  (на рис. Т7.1 показаны пунктиром). Полагая  $Y_{11}^{(3)} = 0$ ;  $Y_{12}^{(3)} = 0$ , найдите коэффициенты передачи цепей по напряжению  $K_a = \dot{U}_2 / \dot{U}_1$ ,  $K_b = \dot{U}_3 / \dot{U}_1$  и выразите  $K_b$  через  $K_a$ . Каким будет коэффициент  $K_b$ , если  $|K_a| \gg 1$ ?

**7.3р.** Составьте неопределенную матрицу проводимостей многополюсника, изображенного на рис. Т7.2<sup>1</sup>.

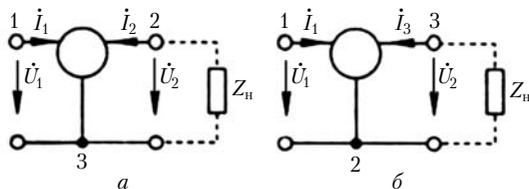


Рис. Т7.1

<sup>1</sup> Здесь и в дальнейшем все узлы многополюсника обозначаются цифрами в скобках, а внешние узлы (выводы многополюсника) — цифрами без скобок.

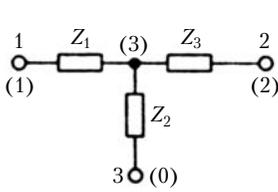


Рис. Т7.2

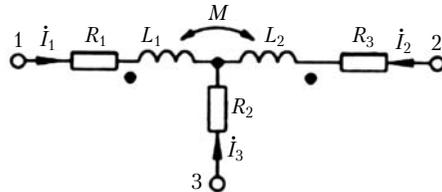


Рис. Т7.3

**7.4р.** На рис. Т7.3 приведена схема многополюсника с индуктивно связанными элементами. Найдите неопределенную матрицу  $Y$ -параметров этого многополюсника.

**7.5.** Решите задачу 7.4р для многополюсника, показанного на рис. Т7.4.

**7.6р.** Типовая схема усилительного каскада приведена на рис. Т7.5. Трехполюсник – усилительный элемент (электронная лампа, биполярный или полевой транзистор). Включенный по схеме с общим выводом 3 трехполюсник характеризуется укороченной матрицей проводимостей  $Y_{ij}^{(3)} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$ . Используя обобщенный метод узловых напряжений, составьте уравнения электрического равновесия цепи.

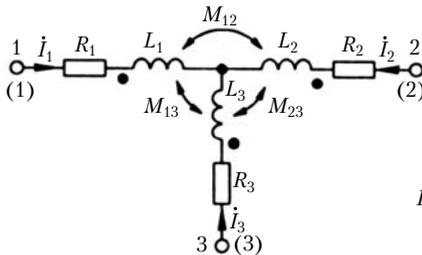


Рис. Т7.4

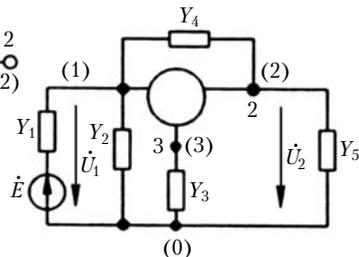


Рис. Т7.5

**7.7р.** Два биполярных транзистора  $T_A$  и  $T_B$  соединены между собой так, что образуют составной транзистор (рис. Т7.6, а). Найдите неопределенную матрицу проводимостей составного транзистора, если известны укороченные матрицы проводимостей транзисторов  $T_A$  и  $T_B$ , включенных по схеме с общим эмиттером (рис. Т7.6, б). Элементы матриц выражены в сименсах.

$$Y_{ijA}^{(3)} = \begin{bmatrix} 4,5 \cdot 10^{-4} & -9 \cdot 10^{-7} \\ 4,5 \cdot 10^{-2} & 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad Y_{ijB}^{(3)} = \begin{bmatrix} 8,2 \cdot 10^{-4} & -8 \cdot 10^{-7} \\ 4,1 \cdot 10^{-2} & 9 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

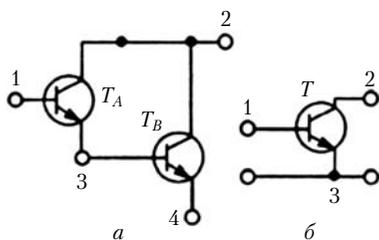


Рис. Т7.6

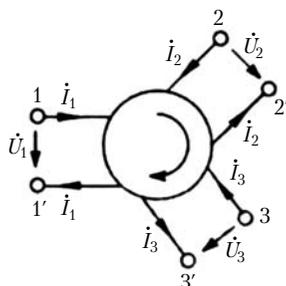


Рис. Т7.7

**7.8р.** Уравнения электрического равновесия шестиполюсника (рис. Т7.7) имеют вид

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R & -R \\ -R & 0 & R \\ R & -R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{11} \\ \dot{I}_{22} \\ \dot{I}_{33} \end{bmatrix}$$

Цепь, описываемую такими уравнениями, называют идеальным трехходовым циркулятором и применяют в устройствах сверхвысоких частот для направленной передачи мощности.

Постройте эквивалентную схему циркулятора, соответствующую заданным уравнениям.

**7.9.** К зажимам 1 – 1' циркулятора (рис. Т7.7) подключен источник напряжения  $\dot{E}$  с внутренним сопротивлением  $R$ , а к зажимам 2 – 2' и 3 – 3' присоединены элементы  $R$ . Используя результат решения задачи 7.8р, убедитесь, что вся мощность, подводимая к зажимам 1 – 1', передается только на зажимы 2 – 2'.

### Решения и методические указания

**7.3р.** Найдем  $Y$ -параметры многополюсника, включенного по схеме с общим выводом 3. Уравнения многополюсника в форме  $Y$  для этого случая имеют вид

$$\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_{10} + Y_{12}\dot{U}_{20}; \quad \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_{10} + Y_{22}\dot{U}_{20}.$$

В режиме короткого замыкания на выходе ( $\dot{U}_{20} = 0$ )

$$Y_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_{10}} \right|_{\dot{U}_{20}=0}; \quad Y_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_{10}} \right|_{\dot{U}_{20}=0}.$$

Используя схему опыта короткого замыкания (рис. Т7.8), запишем

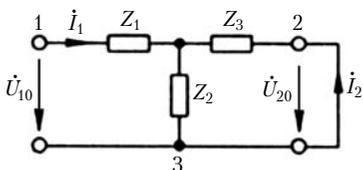


Рис. Т7.8

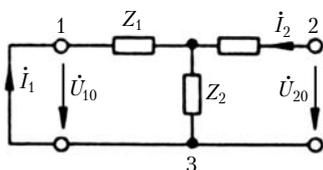


Рис. Т7.9

$$\dot{I}_1|_{\dot{U}_{20}=0} = \frac{\dot{U}_{10}}{Z_1 + Z_{\text{эк}}}; \quad \dot{I}_2|_{\dot{U}_{20}=0} = -\dot{U}_{10} \frac{Z_{\text{эк}}}{Z_1 + Z_{\text{эк}}} \frac{1}{Z_3},$$

где  $Z_{\text{эк}} = Z_2 Z_3 (Z_2 + Z_3)^{-1}$  — эквивалентное сопротивление параллельно включенных ветвей  $Z_2$  и  $Z_3$ . Отсюда получим

$$Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_{10}} \Big|_{\dot{U}_{20}=0} = \frac{Z_2 + Z_3}{\Delta_z}; \quad Y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_{10}} \Big|_{\dot{U}_{20}=0} = \frac{-Z_2}{\Delta_z},$$

где  $\Delta_z = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3$ .

В режиме короткого замыкания на входе ( $\dot{U}_{10} = 0$ ) найдем аналогичным образом параметры  $Y_{12}$  и  $Y_{22}$  (рис. Т7.9):

$$Y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_{20}} \Big|_{\dot{U}_{10}=0} = Y_{21} = \frac{-Z_2}{\Delta_z}; \quad Y_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_{20}} \Big|_{\dot{U}_{10}=0} = \frac{Z_1 + Z_2}{\Delta_z}.$$

Таким образом, определены все элементы укороченной матрицы проводимостей многополюсника. Для перехода от укороченной матрицы проводимостей к неопределенной дополним укороченную матрицу третьим столбцом и третьей строкой, элементы которых выбраны таким образом, чтобы сумма элементов каждой строки и каждого столбца равнялась нулю. Окончательно получим

$$Y_{ij} = \frac{1}{\Delta_z} \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & Z_2 + Z_3 & -Z_2 & -Z_3 \\ 2 & -Z_2 & Z_1 + Z_2 & -Z_1 \\ 3 & -Z_3 & -Z_1 & Z_1 + Z_3 \end{array}$$

**7.4р.** Преобразуем схему замещения рассматриваемой цепи (см. рис. Т7.3), заменив связанные индуктивности, имеющие общую точку, схемой замещения, не содержащей взаимной индуктивности (рис. Т7.10). Для определения  $Y$ -параметров такого многополюсника воспользуемся формулами, полученными при решении задачи 7.3р:

$$Y_{11} = \frac{Z_2 + Z_3}{\Delta_z}; \quad Y_{12} = \frac{-Z_2}{\Delta_z}; \quad Y_{13} = \frac{-Z_3}{\Delta_z}$$

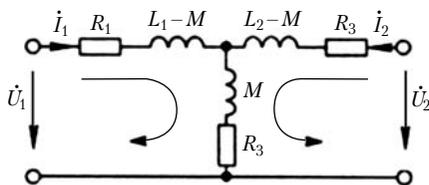


Рис. 7.10

и т.д., где  $\Delta_z = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3$ ;  $Z_1 = R_1 + j\omega(L_1 - M)$ ;  $Z_2 = R_2 + j\omega M$ ;  $Z_3 = R_3 + j\omega(L_2 - M)$ .

**7.6р.** Найдём матрицу узловых проводимостей  $\mathbf{Y}_{ij}^*$  и матрицу-столбец узловых токов  $\mathbf{J}_{i0}$  вспомогательной цепи, которая получается из исходной цепи при удалении усилительного элемента:

$$\mathbf{Y}_{(ij)}^* = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline Y_1 + Y_2 + Y_4 & -Y_4 & 0 \\ \hline -Y_4 & Y_4 + Y_5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & Y_3 \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{J}_{i0} = \begin{array}{|c|} \hline \dot{E}Y_1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

Перейдём от укороченной матрицы проводимостей усилительного элемента к неопределённой матрице:

$$\mathbf{Y}_{(ij)} = \begin{array}{c} 1(1) \\ 2(2) \\ 3(3) \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline Y_{11} & Y_{12} & -Y_{11} - Y_{12} \\ \hline Y_{21} & Y_{22} & -Y_{21} - Y_{22} \\ \hline -Y_{11} - Y_{21} & -Y_{12} - Y_{22} & \Sigma Y_{ij} \\ \hline \end{array}$$

где  $\Sigma Y_{ij} = Y_{11} + Y_{12} + Y_{21} + Y_{22}$ . В скобках указаны номера узлов схемы усилительного каскада, к которым подключены выводы усилительного элемента.

Допишем к элементам матрицы узловых проводимостей вспомогательной цепи  $\mathbf{Y}_{ij}^*$ , стоящим на пересечении  $i$ -й строки  $j$ -го столбца, соответствующие элементы неопределённой матрицы проводимостей усилительного элемента  $\mathbf{Y}_{ij}$  и найдём матрицу проводимостей всей цепи:

$$\mathbf{Y}_{(ij)} = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline Y_{11} + Y_1 + Y_2 + Y_4 & Y_{12} - Y_4 & -Y_{11} - Y_{12} \\ \hline Y_{22} + Y_4 & Y_{22} + Y_4 + Y_5 & -Y_{21} - Y_{22} \\ \hline -Y_{11} - Y_{21} & -Y_{12} - Y_{22} & Y_{11} + Y_{12} + Y_{21} + Y_{22} + Y_3 \\ \hline \end{array}$$

Окончательно получим

$$\mathbf{Y}_{(ij)} \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dot{U}_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}Y_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где  $[U_{10}, U_{20}, U_{30}]^m$  — матрица-столбец узловых напряжений;  
 $Y_{(11)} = Y_{11} + Y_1 + Y_{12} + Y_4$ ;  $Y_{(12)} = Y_{12} - Y_4$  и т.д.

**7.7р.** По заданной укороченной матрице проводимостей транзистора  $T_A$  составим неопределенную матрицу:

$$Y_{ijA} = \begin{array}{c} 1(1) \\ 2(2) \\ 3(3) \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1(1) & 2(2) & 3(3) \\ \hline 1(1) & Y_{11A} & Y_{12A} & -Y_{11A} - Y_{12A} \\ \hline 2(2) & Y_{21A} & Y_{22A} & -Y_{21A} - Y_{22A} \\ \hline 3(3) & -Y_{11A} - Y_{21A} & -Y_{12A} - Y_{22A} & \Sigma Y_{ijA} \\ \hline \end{array}$$

где  $\Sigma Y_{ijA} = Y_{11A} + Y_{12A} + Y_{21A} + Y_{22A}$ .

Аналогичным образом запишем неопределенную матрицу проводимостей транзистора  $T_B$ :

$$Y_{ijB} = \begin{array}{c} 1(3) \\ 2(2) \\ 3(4) \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1(3) & 2(2) & 3(4) \\ \hline 1(3) & Y_{11B} & Y_{12B} & -Y_{11B} - Y_{12B} \\ \hline 2(2) & Y_{21B} & Y_{22B} & -Y_{21B} - Y_{22B} \\ \hline 3(4) & -Y_{11B} - Y_{21B} & -Y_{12B} - Y_{22B} & \Sigma Y_{ijB} \\ \hline \end{array}$$

В скобках указаны номера узлов исследуемой цепи, к которым подключены соответствующие выводы транзистора  $T_B$ .

Составим неопределенную матрицу проводимостей многополюсника (составного транзистора):

$$Y_{ij} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & Y_{11A} & Y_{12A} & -Y_{11A} - Y_{12A} & 0 \\ \hline 2 & Y_{21A} & Y_{22A} + Y_{22B} & -Y_{21A} - Y_{22A} + Y_{21B} & -Y_{21B} - Y_{22B} \\ \hline 3 & -Y_{11A} - Y_{21A} & -Y_{12A} - Y_{22A} + Y_{12B} & \Sigma Y_{ijA} + Y_{11B} & -Y_{11B} - Y_{12B} \\ \hline 4 & 0 & -Y_{12B} - Y_{22B} & -Y_{11B} - Y_{21B} & \Sigma Y_{ijB} \\ \hline \end{array}$$

Зажим 3 в схеме многополюсника является внутренним, поэтому вычеркнем третью строку и третий столбец в матрице  $Y_{ij}$ , а все оставшиеся элементы пересчитаем по формуле  $Y'_{ij} = Y_{ij} - Y_{i3}Y_{3j}/Y_{33}$ .

Вычисления по этой формуле следует проводить с высокой точностью, потому что в ряде случаев, например при расчете параметра  $Y'_{11}$ , приходится находить разность близких величин. В результате получим неопределенную матрицу проводимостей составного транзистора:

$$Y'_{ijB} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 8,94573 \cdot 10^{-6} & -9,960712 \cdot 10^{-7} & -7,949658 \cdot 10^{-6} \\ \hline 2 & 4,106184 \cdot 10^{-2} & 1,814218 \cdot 10^{-5} & -4,107998 \cdot 10^{-2} \\ \hline 3 & -4,107079 \cdot 10^{-2} & -1,71461 \cdot 10^{-5} & 4,108793 \cdot 10^{-2} \\ \hline \end{array}$$

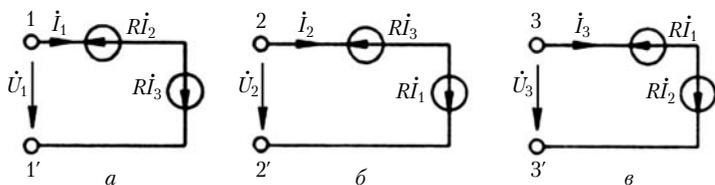


Рис. Т7.11

Числовые значения элементов этой матрицы приведены с большим числом «запасных» знаков, чтобы показать на конкретном примере основное свойство неопределенной матрицы проводимостей многополюсника: сумма элементов любой строки (любого столбца) неопределенной матрицы проводимостей равна нулю.

**7.8р.** Перепишем уравнения электрического равновесия циркулятора в скалярной форме:  $\dot{U}_1 = R\dot{I}_2 - R\dot{I}_3$ ;  $\dot{U}_2 = -R\dot{I}_1 + R\dot{I}_3$ ;  $\dot{U}_3 = R\dot{I}_1 - R\dot{I}_2$ . Первому уравнению этой системы соответствует эквивалентная схема, содержащая два зависимых источника (рис. Т7.11, а), двум другим уравнениям системы — эквивалентные схемы, приведенные на рис. Т7.11, б, в.

Таким образом, эквивалентная схема циркулятора представляет собой совокупность всех трех схем, изображенных на рис. Т7.11, а — в.

## 7.2. Основные уравнения и системы первичных параметров проходных четырехполюсников

**7.10р.** Определите А-параметры четырехполюсника рис. Т7.12 путем преобразования уравнений электрического равновесия, составленных на основании законов Кирхгофа.

**7.11р.** Решите задачу 7.10р, используя опыты холостого хода и короткого замыкания.

**7.12.** Используя формулы перехода, определите Н-параметры четырехполюсника, рассмотренного в задаче 7.10р.

**7.13.** Определите Z-параметры четырехполюсника рис. Т7.12. Применяя формулы перехода, убедитесь в том, что матрица Y-параметров для данного четырехполюсника не существует, т.е. значения всех элементов этой матрицы обращаются в бесконечность.

**7.14.** Найдите А-параметры четырехполюсника рис. Т7.13 и Т7.14, а, б.

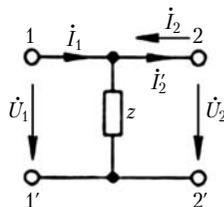


Рис. Т7.12

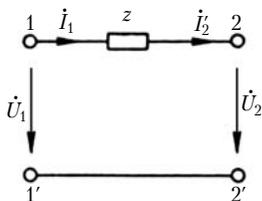


Рис. Т7.13

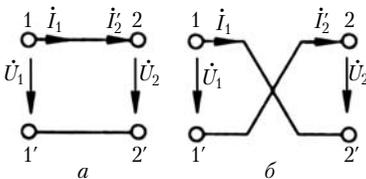


Рис. Т7.14

**7.15м.** Определите  $Z$ -параметры четырехполюсника рис. Т7.15, а, б.

**7.16р.** Определите  $Z$ -параметры несимметричного мостового четырехполюсника рис. Т7.16.

**7.17.** Найдите  $A$ -параметры четырехполюсников рис. Т7.17, а – в.

**7.18м.** На рис. Т7.18 и Т7.19 приведены схемы симметричных Т-образного и мостового четырехполюсников. Сформулируйте условие их эквивалентности.

**7.19.** Найдите  $A$ -параметры симметричного мостового четырехполюсника рис. Т7.19.

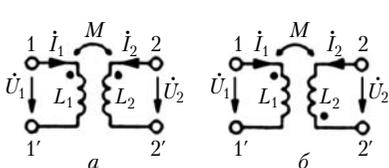


Рис. Т7.15

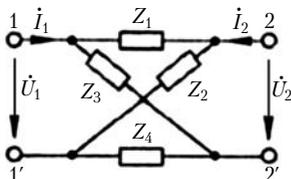


Рис. Т7.16

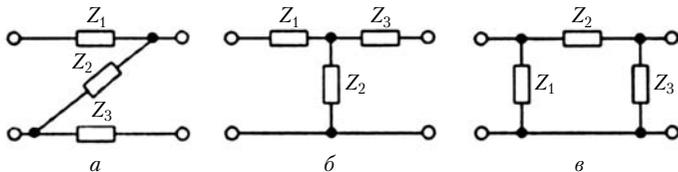


Рис. Т7.17

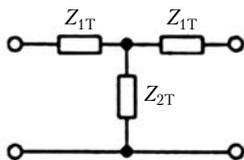


Рис. Т7.18

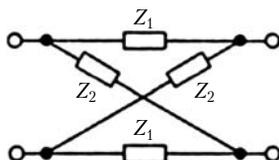


Рис. Т7.19

**7.20м.** Покажите, что между  $Z$ - и  $Y$ -параметрами одного и того же четырехполюсника существует взаимосвязь:  $Z_{11}Y_{11} = Z_{22}Y_{22}$ .

**7.21р.** Определите  $Y$ -параметры неавтономного четырехполюсника рис. Т7.20.

**7.22р.** Определите  $Z$ -параметры и постройте  $T$ -образную каноническую эквивалентную схему неавтономного четырехполюсника рис. Т7.21.

**7.23р.** Получите соотношения для расчета  $A$ -параметров четырехполюсника по результатам измерения комплексных действующих значений напряжений  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{U}_2$  и  $\dot{U}_3$  при замкнутом и разомкнутом ключе  $S$ . Сопротивления  $Z_{н1}$  и  $Z_{н2}$  считайте известными (рис. Т7.22).

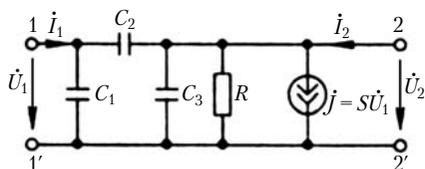


Рис. Т7.20

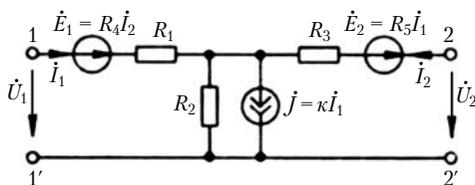


Рис. Т7.21

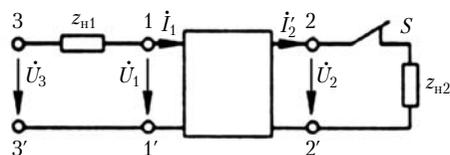


Рис. Т7.22

**7.24м.** По данным задачи 7.23р получите соотношения для расчета  $Z$ -параметров четырехполюсника.

**7.25.** В нагруженном четырехполюснике рис. Т7.23 измерены напряжения при: различных значениях сопротивления нагрузки; а) при  $R_{н} = 1 \text{ кОм}$ ;  $\dot{U}_1 = 1 \text{ В}$ ;  $\dot{U}_2 = 0,3 \text{ В}$ ; б) при  $R_{н} = 2 \text{ кОм}$ ;  $\dot{U}_1 = 2 \text{ В}$ ;  $\dot{U}_2 = 0,72 \text{ В}$ . Каким будет напряжение  $\dot{U}_2$ , если  $R_{н} = 3 \text{ кОм}$ ;  $\dot{U}_1 = 3 \text{ В}$ ?

**7.26.** Для взаимного четырехполюсника (рис. Т7.24, а) задана матрица  $A$ -параметров:

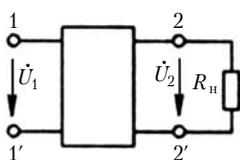


Рис. T7.23

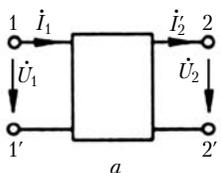
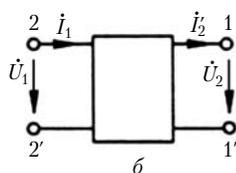


Рис. T7.24



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Найдите матрицу  $A$ -параметров для того же четырехполюсника, включенного согласно рис. T7.24, б.

**7.27р.** Известны матрицы  $Z$ -параметров двух четырехполюсников  $A$  и  $B$ :

$$\mathbf{Z}_A = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ Ом}; \quad \mathbf{Z}_B = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ Ом}.$$

Определите первичные параметры составного четырехполюсника, образованного соединением этих четырехполюсников: а) последовательным; б) параллельным; в) каскадным. В последнем случае четырехполюсник  $A$  предшествует в цепочке четырехполюснику  $B$

**7.28.** Представьте мостовой T-образный четырехполюсник (рис. T7.25) в виде параллельного соединения двух элементарных четырехполюсников и определите матрицу  $Y$ -параметров составного четырехполюсника.

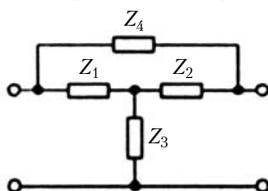


Рис. T7.25

**7.29.** Представьте мостовой T-образный четырехполюсник (рис. T7.25) в виде последовательного соединения двух элементарных четырехполюсников и определите матрицу  $Z$ -параметров цепи.

**7.30.** Найдите матрицу  $Y$ -параметров двойной T-образной цепи (рис. T7.26).

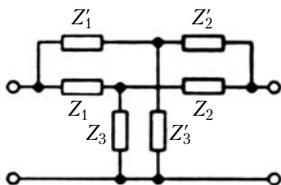


Рис. T7.26

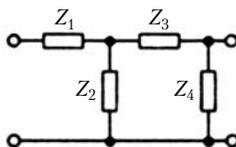


Рис. T7.27

**7.31.** Найдите  $A$ -параметры четырехполюсника (рис. Т7.27) с лестничной структурой.

**7.32.** Как нужно соединить два одинаковых несимметричных четырехполюсника, чтобы в результате получился симметричный четырехполюсник?

**7.33.** Два симметричных пассивных четырехполюсника  $A$  и  $B$  соединены каскадно. Является ли в общем случае полученный составной четырехполюсник также симметричным? Найдите соотношения между  $A$ -параметрами элементарных четырехполюсников, при которых составной четырехполюсник симметричен.

**7.34м.** Определите  $Z$ -параметры составного четырехполюсника, образованного последовательным соединением четырехполюсников  $A$  и  $B$  (рис. Т7.28).

**7.35м.** Определите  $Y$ -параметры составного четырехполюсника, образованного параллельным соединением четырехполюсников  $A$  и  $B$  (рис. Т7.29).

**7.36р.** К обратимому четырехполюснику  $A$ ,  $Z$ -параметры которого известны, подключены индуктивно связанные элементы  $L_1$  и  $L_2$  (рис. Т7.30). Найдите  $Z$ -параметры полученного четырехполюсника  $B$ .

**7.37м.** Найдите  $Z$ -параметры четырехполюсника  $B$ , полагая известными  $Z$ -параметры обратимого четырехполюсника  $A$  (рис. Т7.31).

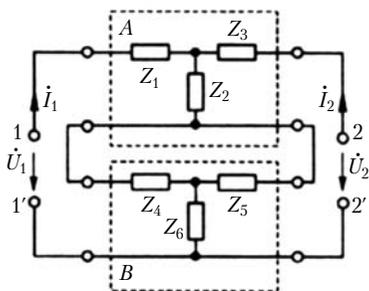


Рис. Т7.28

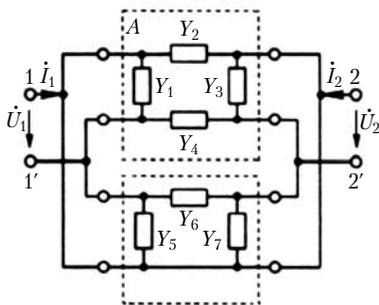


Рис. Т7.29

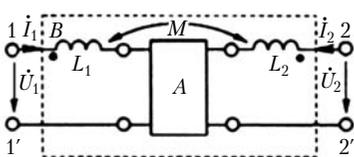


Рис. Т7.30

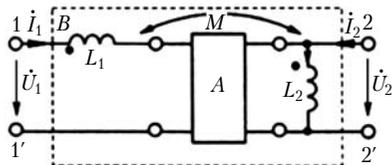


Рис. Т7.31

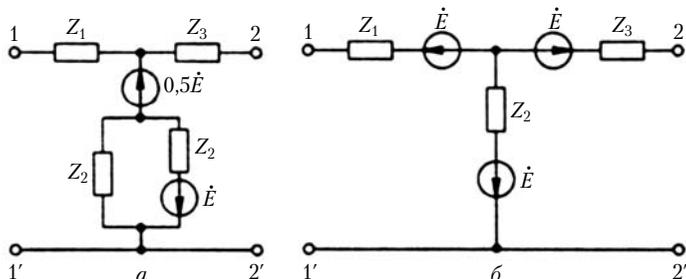


Рис. Т7.32

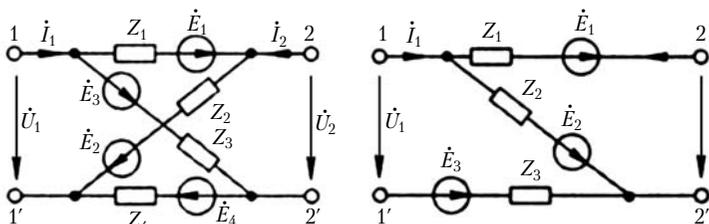


Рис. Т7.33

Рис. Т7.34

**7.38м.** Четырехполюсники рис. Т7.32, а, б содержат независимые источники энергии. Являются ли эти четырехполюсники автономными?

**7.39р.** Постройте Т-образную схему замещения автономного несимметричного мостового четырехполюсника рис. Т7.33 и определите параметры ее элементов.

**7.40.** Постройте Т-образную схему замещения автономного четырехполюсника (рис. Т7.34) и определите параметры ее элементов. При каких условиях четырехполюсник превращается в неавтономный, несмотря на наличие независимых источников?

**7.41.** Постройте П-образную схему замещения автономного четырехполюсника (рис. Т7.35) и определите параметры ее элементов. При каких условиях этот четырехполюсник превращается в неавтономный, несмотря на наличие независимых источников?

**7.42.** Определите напряжение  $\dot{U}_2$  на выходе автономного четырехполюсника (рис. Т7.36) для  $\dot{U}_1 = 2e^{j\pi/3}$  В;  $Z_1 = 1$  Ом;  $Z_2 = 2$  Ом;  $Z_3 = 4$  Ом;  $Z_4 = 3$  Ом;  $Z_H = 3$  Ом;  $\dot{E} = 4e^{j\pi/6}$  В.

**7.43.** По данным задачи 7.42 найдите отношение  $\dot{U}_1/\dot{I}_1$  на входе автономного четырехполюсника и сравните результат с входным сопротивлением пассивного четырехполюсника, соответствующего заданному автономному.

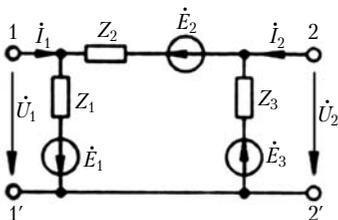


Рис. Т7.35

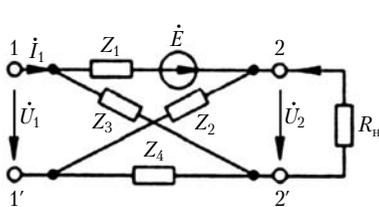


Рис. Т7.36

**7.44р.** Коэффициенты основных уравнений автономного четырехполюсника заданы в форме  $Z$ . Найдите коэффициенты основных уравнений этого же четырехполюсника в форме  $Y$ .

**7.45.** Коэффициенты основных уравнений автономного четырехполюсника заданы в форме  $Y$ . Определите коэффициенты основных уравнений этого же четырехполюсника в форме  $Z$ .

**7.46.** Покажите, что ЭДС  $\dot{E}_{1x}$  и  $\dot{E}_{2x}$  Т-образной схемы замещения автономного четырехполюсника связаны с коэффициентами основных уравнений этого же четырехполюсника в форме  $Y$  соотношениями  $Y_{11}\dot{E}_{1x} + Y_{12}\dot{E}_{2x} = -\dot{J}_{1x}$ ;  $Y_{21}\dot{E}_{1x} + Y_{22}\dot{E}_{2x} = -\dot{J}_{2x}$ .

**7.47.** Покажите, что токи  $\dot{J}_{1к}$  и  $\dot{J}_{2к}$  П-образной схемы замещения автономного четырехполюсника связаны с коэффициентами основных уравнений этого же четырехполюсника в форме  $Z$  соотношениями  $Z_{11}\dot{J}_{1к} + Z_{12}\dot{J}_{2к} = \dot{E}_{1x}$ ;  $Z_{21}\dot{J}_{1к} + Z_{22}\dot{J}_{2к} = \dot{E}_{2x}$ .

**7.48р.** Выразите напряжение  $\dot{U}_1$  и ток  $\dot{I}_1$  на входе автономного четырехполюсника через напряжение  $\dot{U}_2$  и ток  $\dot{I}_2$  на его выходе и коэффициенты основных уравнений четырехполюсника в форме  $Z$ .

**7.49.** Выразите напряжение  $\dot{U}_1$  и ток  $\dot{I}_1$  на входе автономного четырехполюсника через напряжение  $\dot{U}_2$  и ток  $\dot{I}_2$  на его выходе и коэффициенты основных уравнений четырехполюсника в форме  $Y$ .

### Решения и методические указания

**7.10р.** Преобразуя уравнения электрического равновесия цепи, составленные на основании законов Кирхгофа,

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{U}_2; \\ \dot{U}_1 &= Z(\dot{I}_1 - \dot{I}_2)\end{aligned}$$

к виду, соответствующему основным уравнениям четырехполюсника в форме  $A$

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2; \\ \dot{I}_1 &= (\dot{U}_2/Z) + \dot{I}_2, \end{aligned}$$

и сравнивая эти уравнения с основными уравнениями четырехполюсника в форме  $A$ :  $\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2$ ;  $\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2$ , получаем  $A_{11} = 1$ ;  $A_{12} = 0$ ;  $A_{21} = Z^{-1}$ ;  $A_{22} = 1$ .

**7.11р.** Из основных уравнений четырехполюсника в форме  $A$  (см. задачу 7.10р) найдите выражения для определения  $A$ -параметров по данным опытов холостого хода и короткого замыкания:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} = 1; & A_{12} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} = 0; \\ A_{21} &= \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} = 1/Z; & A_{22} &= \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} = 1. \end{aligned}$$

**7.15м.** Составьте компонентные уравнения связанных индуктивностей и сравните их с основными уравнениями четырехполюсника в форме  $Z$ .

**7.16р.** Придайте схеме рассматриваемого четырехполюсника более наглядный вид (рис. Т7.37) и запишите основные уравнения четырехполюсника в форме  $Z$ :  $\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2$ ;  $\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2$ . В режиме холостого хода на выходе ( $\dot{I}_2 = 0$ )

$$Z_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0}; \quad Z_{21} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0}.$$

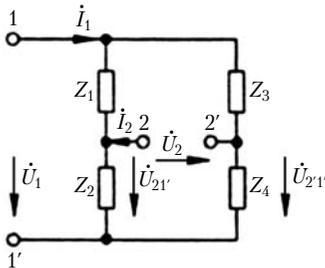


Рис. Т7.37

Как следует из полученных выражений и схемы (см. рис. Т7.37), параметр  $Z_{11}$  представляет собой входное сопротивление четырехполюсника со стороны зажимов  $1 - 1'$  при холостом ходе на зажимах  $2 - 2'$  и численно равен входному сопротивлению двухполюсника, образованного параллельным соединением двух ветвей с сопротивлениями  $Z_1 + Z_2$  и  $Z_3 + Z_4$ . Следовательно,  $Z_{11} = (Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)^{-1}$ .

На основании второго закона Кирхгофа и закона Ома можно записать:

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{21'} - \dot{U}_{21''};$$

$$\dot{U}_{21'} \Big|_{i_2=0} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{U}_1; \quad \dot{U}_{21''} \Big|_{i_2=0} = \frac{Z_4}{Z_3 + Z_2} \dot{U}_1.$$

Определив отсюда отношение напряжений  $\dot{U}_2/\dot{U}_1$  при  $\dot{I}_2 = 0$  и используя полученное ранее выражение для  $Z_{11}$ , найдем  $Z_{11} = (Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4)/(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)$ .

Аналогичным образом определим параметры  $Z_{22}$  и  $Z_{12}$  по результатам опыта холостого хода на входе четырехполюсника ( $\dot{I}_1 = 0$ ):

$$Z_{22} = \frac{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}; \quad Z_{12} = Z_{21}.$$

Последнее равенство справедливо для любого линейно-пассивного четырехполюсника.

**7.18м.** Составьте матрицы  $Z$ -параметров для каждого четырехполюсника. (Для мостового четырехполюсника используйте результаты решения задачи 7.16р.) Выясните, при каких условиях эти матрицы равны между собой.

**7.20м.** Используйте формулы перехода от  $Z$ -к  $Y$ -параметрам.

**7.21р.** Составьте уравнения электрического равновесия цепи, используя метод узловых напряжений:

$$(j\omega C_1 + j\omega C_2)\dot{U}_1 - j\omega C_2\dot{U}_2 = \dot{I}_1;$$

$$-j\omega C_2\dot{U}_2 + (j\omega C_2 + j\omega C_3 + 1/R)\dot{U}_2 = \dot{I}_2 - \dot{J}.$$

Учитывая, что  $\dot{J} = S\dot{U}_1$ , и сравнивая полученные уравнения с основными уравнениями четырехполюсника в форме  $Y$ , найдите

$$Y_{11} = j\omega(C_1 + C_2); \quad Y_{12} = -j\omega C_2; \quad Y_{21} = S - j\omega C_2;$$

$$Y_{22} = 1/R + j\omega(C_2 + C_3).$$

**7.22р.** Заменяя источник тока  $\dot{J} = k\dot{I}_1$  с внутренним сопротивлением  $R_2$  источником напряжения  $\dot{E}_3 = kR_2\dot{I}_1$  с тем же внутренним сопротивлением и составив уравнения электрического равновесия цепи по методу контурных токов, определим выражения для  $Z$ -параметров четырехполюсника:

$$Z_{11} = R_1 + R_2 - kR_2; \quad Z_{12} = R_2 - R_4;$$

$$Z_{21} = R_2 + R_5 - kR_2; \quad Z_{22} = R_2 + R_3.$$

T-образная схема замещения рассматриваемого четырехполюсника приведена на рис. Т7.38. Параметры элементов эквивалентной схемы:

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_{11} - Z_{12} = R_1 + R_4 - kR_2; \\ Z_2 &= Z_{12} = R_2 - R_4; \\ Z_3 &= Z_{22} - Z_{12} = R_3 + R_4; \\ \dot{E} &= (Z_{21} - Z_{12})\dot{I}_1 = (R_4 + R_5 - kR_2)\dot{I}_1. \end{aligned}$$

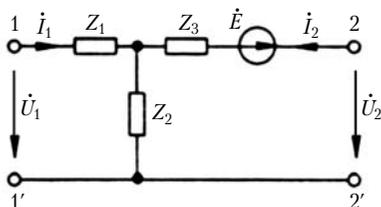


Рис. Т7.38

Как очевидно из сравнения рис. Т7.21 и Т7.38, каноническая эквивалентная схема (см. рис. Т7.38) значительно проще, чем исходная схема (см. рис. Т7.21).

**7.23р.** Расчетные соотношения для определения

$A$ -параметров выводятся из основных уравнений четырехполюсника в форме  $A$ :

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2. \end{aligned}$$

Параметры  $A_{11}$  и  $A_{21}$ , образующие первый столбец матрицы  $A$ -параметров, измеряются в режиме холостого хода на выходе (ключ  $S$  разомкнут,  $\dot{I}_2 = 0$ ):

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2; \quad \dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2,$$

откуда

$$A_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0}; \quad A_{21} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0}.$$

Следовательно, параметр  $A_{11}$  непосредственно выражается через напряжения  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$ , измеренные в режиме холостого хода. Для определения  $A_{21}$  выразим ток  $\dot{I}_1$  через известные напряжения  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_3$ :  $\dot{I}_1 = (\dot{U}_3 - \dot{U}_1)/Z_{н1}$ .

Таким образом,

$$A_{21} = \frac{1}{Z_{н1}} \left[ \left. \frac{\dot{U}_3}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} - A_{11} \right].$$

Два других  $A$ -параметра определим по результатам измерения напряжений нагруженного четырехполюсника (ключ  $S$  замкнут,  $\dot{I}_2 \neq 0$ ). Из первого уравнения исходной системы получаем выражение для определения  $A_{12}$ :

$$A_{12} = Z_{н2} \left[ \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2 \neq 0} - A_{11} \right],$$

а из второго уравнения находим

$$A_{22} = Z_{n2} \left( \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{I}_2 \neq 0} - A_{21} \right).$$

Определяя ток  $\dot{I}_1$  таким же образом, как и в режиме холостого хода, получим

$$A_{22} = Z_{n2} \left[ \frac{1}{Z_{n1}} \left( \frac{\dot{U}_3}{\dot{U}_2} - \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right) \Big|_{\dot{I}_2 \neq 0} - A_{21} \right].$$

**7.24м.** Учтите, что направление тока  $\dot{I}_2$  в основных уравнениях четырехполюсника в форме  $Z$  противоположно направлению тока  $\dot{I}'_2$  (см. рис. Т7.22).

**7.27р.** а) При последовательном соединении четырехполюсников матрица  $Z$ -параметров составного четырехполюсника равна сумме матриц  $Z$ -параметров составляющих его элементарных четырехполюсников:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B = \begin{bmatrix} 28 & 7 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} \text{ Ом.}$$

б) При параллельном соединении четырехполюсников матрица  $Y$ -параметров составного четырехполюсника равна сумме матриц  $Y$ -параметров составляющих его элементарных четырехполюсников. Используя формулы перехода  $Y_{11} = Z_{22}/\Delta_z$ ;  $Y_{12} = -Z_{12}/\Delta_z$ ;  $Y_{21} = -Z_{21}/\Delta_z$ ;  $Y_{22} = Z_{11}/\Delta_z$ ;  $\Delta_z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$ , определим  $Y$ -параметры элементарных четырехполюсников:

$$\mathbf{Y}_A = \begin{bmatrix} 0,0667 & -0,0333 \\ -0,0333 & 0,267 \end{bmatrix} \text{ См; } \mathbf{Y}_B = \begin{bmatrix} 0,128 & -0,106 \\ -0,106 & 0,255 \end{bmatrix} \text{ См.}$$

Суммируя  $\mathbf{Y}_A$  и  $\mathbf{Y}_B$ , определим  $Y$ -параметры составного четырехполюсника:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B = \begin{bmatrix} 0,195 & -0,139 \\ -0,139 & 0,522 \end{bmatrix} \text{ См.}$$

в) При каскадном соединении четырехполюсников матрица  $A$ -параметров составного четырехполюсника равна произведению матриц  $A$ -параметров составляющих его элементарных четырехполюсников. Используя формулы перехода  $A_{11} = Z_{11}/Z_{21}$ ;  $A_{12} = (Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21})/Z_{21}$ ;  $A_{21} = 1/Z_{21}$ ;  $A_{22} = Z_{22}/Z_{21}$ , определим матрицы  $A$ -параметров элементарных четырехполюсников:

$$\mathbf{A}_A = \begin{bmatrix} 8 & 30 \\ 0,5 & 2 \end{bmatrix}; \mathbf{A}_B = \begin{bmatrix} 2,4 & 9,4 \\ 0,2 & 1,2 \end{bmatrix}.$$

Перемножив  $\mathbf{A}_A$  и  $\mathbf{A}_B$ , найдем  $A$ -параметры составного четырехполюсника:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_A \mathbf{A}_B = \begin{bmatrix} 25,2 & 111,2 \\ 1,6 & 7,1 \end{bmatrix}.$$

В матрицах  $A$ -параметров элементы главной диагонали безразмерны, а недиагональные элементы имеют размерности Ом и См.

**7.34м.** Соединение четырехполюсников  $A$  и  $B$  является нерегулярным, поэтому суммировать матрицы первичных параметров элементарных четырехполюсников для определения первичных параметров составного четырехполюсника в данном случае недопустимо. Эти параметры следует находить непосредственно по схеме составного четырехполюсника.

**7.35м.** См. указание к задаче 7.34м.

**7.36р.** Представим четырехполюсник  $B$  в виде последовательного соединения двух элементарных четырехполюсников  $A$  и  $C$  (рис. Т7.39). Соединение четырехполюсников является регулярным, поэтому применим правило суммирования матриц  $Z$ -параметров элементарных четырехполюсников:  $\mathbf{Z}_B = \mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_C$ .  $Z$ -параметры четырехполюсника  $C$  были найдены в задаче 7.15м:  $Z_{11C} = j\omega L_1$ ;  $Z_{12C} = Z_{21C} = j\omega M$ ;  $Z_{22C} = j\omega L_2$ . Суммируя матрицы  $\mathbf{Z}_A$  и  $\mathbf{Z}_C$ , получим  $Z_{11B} = Z_{11A} + j\omega L_1$ ;  $Z_{12B} = Z_{21B} = Z_{12A} + j\omega M$ ;  $Z_{22B} = Z_{22A} + j\omega L_2$ .

**7.37м.** Исследуемый четырехполюсник следует представить в виде последовательно-параллельного соединения четырехполюсников  $A$  и  $C$  (рис. Т7.40). Соединение четырехполюсников является регулярным, поэтому применимо правило суммирования матриц  $H$ -параметров элементарных четырехполюсников:  $\mathbf{H}_B = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_C$ . Далее следует найти  $H$ -параметры элементарных четырехполюсников по их

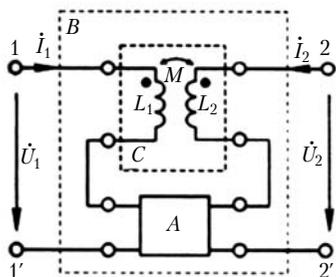


Рис. Т7.39

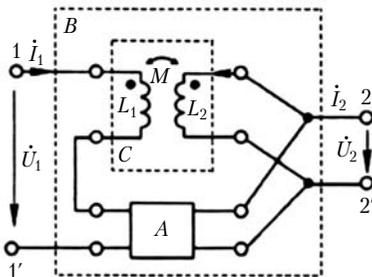


Рис. Т7.40

известным  $Z$ -параметрам, записать матрицу  $\mathbf{H}_B$  и определить по ней с помощью формул перехода искомые  $Z$ -параметры.

**7.38м.** Для ответа на вопрос задачи нужно найти напряжения холостого хода на зажимах  $1 - 1'$  и  $2 - 2'$  каждого четырехполюсника.

**7.39р.**  $Z$ -параметры пассивного четырехполюсника, который получают из заданного автономного путем исключения всех независимых источников, были получены раньше (см. задачу 7.16р). Следовательно, остается найти напряжения холостого хода  $\dot{U}_{1x}$  и  $\dot{U}_{2x}$  на входных и выходных зажимах автономной цепи.

Придадим схеме рис. Т7.33 более наглядный вид (рис. Т7.41, а). Как очевидно из рисунка, напряжения холостого хода между выводами четырехполюсника

$$\begin{aligned}\dot{U}_{1x} &= \dot{E}_{1x} = (Z_1 + Z_2)\dot{I} - \dot{E}_1 - \dot{E}_2; \\ \dot{U}_{2x} &= \dot{E}_{2x} = (Z_2 + Z_4)\dot{I} - \dot{E}_2 + \dot{E}_4,\end{aligned}$$

где

$$\dot{I} = (\dot{E}_1 + \dot{E}_2 - \dot{E}_3 - \dot{E}_4)(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\dot{U}_{1x} &= -\frac{(\dot{E}_1 + \dot{E}_2)(Z_3 + Z_4) + (\dot{E}_3 + \dot{E}_4)(Z_1 + Z_2)}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}; \\ \dot{U}_{2x} &= \frac{(\dot{E}_1 - \dot{E}_3)(Z_2 + Z_4) + (\dot{E}_4 - \dot{E}_2)(Z_1 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}.\end{aligned}$$

Т-образная схема замещения рассматриваемого четырехполюсника приведена на рис. Т7.41, б, где  $Z_{1T} = Z_{11} - Z_{12} = [Z_1Z_3 + Z_4(2Z_1 + Z_2)]S^{-1}$ ;  $Z_{2T} = Z_{12} = (Z_2Z_3 - Z_1Z_4)]S^{-1}$ ;  $Z_{3T} = Z_{22} - Z_{12} = [Z_1Z_2 + Z_4(2Z_1 + Z_3)]S^{-1}$ ;  $S = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4$ ;  $\dot{E}_{1x} = \dot{U}_{1x}$ ;  $\dot{E}_{2x} = \dot{U}_{2x}$ .

**7.44р.** Уравнения автономного четырехполюсника в форме  $Z$  имеют вид

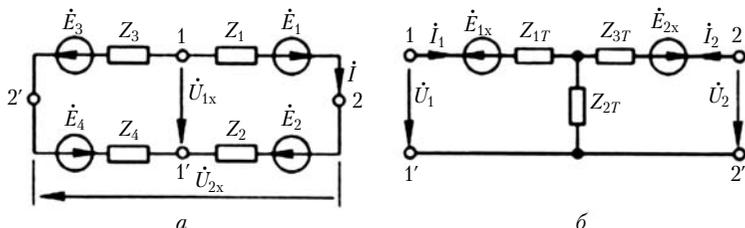


Рис. Т7.41

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 + \dot{E}_{1x}; \\ \dot{U}_2 &= Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 + \dot{E}_{2x}.\end{aligned}$$

Этим уравнениям соответствует Т-образная схема замещения. Найдем из этих уравнений токи  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ :

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= \frac{Z_{22}}{\Delta_z}\dot{U}_1 - \frac{Z_{12}}{\Delta_z}\dot{U}_2 - \frac{Z_{22}}{\Delta_z}\dot{E}_{1x} + \frac{Z_{12}}{\Delta_z}\dot{E}_{2x}; \\ \dot{I}_2 &= -\frac{Z_{21}}{\Delta_z}\dot{U}_1 + \frac{Z_{11}}{\Delta_z}\dot{U}_2 + \frac{Z_{21}}{\Delta_z}\dot{E}_{1x} - \frac{Z_{11}}{\Delta_z}\dot{E}_{2x},\end{aligned}$$

где  $\Delta_z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$ .

Сравним полученный результат с основными уравнениями автономного четырехполюсника в форме  $Y$ :

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 + \dot{J}_{1к}; \\ \dot{I}_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 + \dot{J}_{2к}.\end{aligned}$$

Таким образом, найдена связь между токами  $\dot{J}_{1к}$  и  $\dot{J}_{2к}$  П-образной схемы замещения автономного четырехполюсника и коэффициентами основных уравнений четырехполюсника в форме  $Z$ :

$$\begin{aligned}\dot{J}_{1к} &= -\frac{Z_{22}}{\Delta_z}\dot{E}_{1x} + \frac{Z_{12}}{\Delta_z}\dot{E}_{2x}; \\ \dot{J}_{2к} &= \frac{Z_{21}}{\Delta_z}\dot{E}_{1x} - \frac{Z_{11}}{\Delta_z}\dot{E}_{2x}.\end{aligned}$$

Формулы перехода от  $Z$ -параметров автономного четырехполюсника к  $Y$ -параметрам имеют такой же вид, как и для неавтономного четырехполюсника:

$$Y_{11} = Z_{22}\Delta_z; \quad Y_{12} = -Z_{12}\Delta_z; \quad Y_{21} = -Z_{21}\Delta_z; \quad Y_{22} = Z_{11}\Delta_z.$$

**7.48р.** Система уравнений автономного четырехполюсника в форме  $Z$  имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 + \dot{E}_{1x}; \\ \dot{U}_2 &= Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 + \dot{E}_{2x}.\end{aligned}$$

Из второго уравнения системы получим

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{Z_{21}}\dot{U}_2 - \frac{Z_{22}}{Z_{21}}\dot{I}_2 - \frac{1}{Z_{21}}\dot{E}_{2x}.$$

Подставив это выражение в первое уравнение системы, найдем

$$\dot{U}_1 = \frac{Z_{22}}{Z_{21}}\dot{U}_2 - \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}}\dot{I}_2 - \frac{Z_{11}}{Z_{21}}\dot{E}_{2x} + \dot{E}_{1x}.$$

Полученные уравнения для  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$  можно рассматривать как уравнения автономного четырехполюсника в форме  $A$ :

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2' + \dot{E}_{1x} - A_{11}\dot{E}_{2x}; \\ \dot{I}_1 &= A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2' - A_{21}\dot{E}_{2x},\end{aligned}$$

где  $\dot{I}_2' = -I_2$ ;  $A_{11} = Z_{11}/Z_{21}$ ;  $A_{12} = (Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21})/Z_{21}$ ;  $A_{21} = 1/Z_{21}$ ;  $A_{22} = Z_{22}/Z_{21}$ .

### 7.3. Характеристические параметры и комплексные частотные характеристики неавтономных проходных четырехполюсников

**7.50р.** Определите характеристические параметры четырехполюсника, для которого задана матрица  $A$ -параметров:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & j8 \\ -j & 3 \end{bmatrix}.$$

Элементы главной диагонали этой матрицы безразмерны, а недиагональные элементы имеют размерности Ом и См.

**7.51р.** Напряжения на входе и выходе симметричного четырехполюсника с согласованной нагрузкой  $\dot{U}_1 = 10e^{j30^\circ}$  В;  $\dot{U}_2 = 2e^{j60^\circ}$  В. Найдите постоянную ослабления четырехполюсника  $A$  (Нп, дБ) и постоянную фазы  $B$ .

**7.52.** Найдите отношение напряжений на входе и выходе симметричного четырехполюсника с согласованной нагрузкой, если: а)  $A = 1$  дБ; б)  $A = 3$  дБ; в)  $A = -0,5$  дБ; г)  $A = 1$  Нп; д)  $A = -10$  дБ; е)  $A = 2,5$  Нп; ж)  $A = 26$  дБ.

**7.53.** Для симметричного Т-образного четырехполюсника (рис. Т7.42) заданы сопротивления  $0,5Z_1 = 20$  Ом;  $Z_2 = -j10$  Ом. Определите постоянную ослабления четырехполюсника  $A$  и постоянную фазы  $B$ .

**7.54.** Найдите выражения для характеристического сопротивления  $Z_c$  и постоянной передачи  $\Gamma$  уравновешенного симметричного мостового четырехполюсника (см. рис. Т7.19).

**7.55р.** Симметричный Т-образный четырехполюсник (рис. Т7.42) имеет следующие характеристические параметры:  $A = 1$  Нп;  $B = 1$  рад;  $Z_c = 500 + j500$  Ом. Определите сопротивления  $0,5Z_1, Z_2$ .

**7.56.** Симметричный П-образный четырехполюсник (рис. Т7.43) имеет следующие характеристические па-

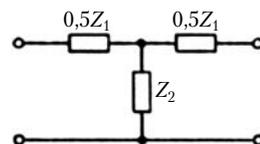


Рис. Т7.42

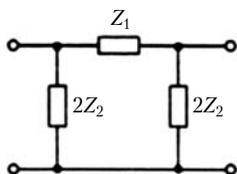


Рис. Т7.43

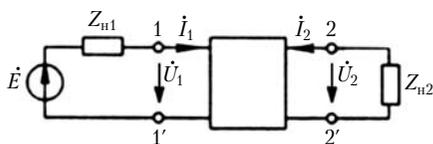


Рис. Т7.44

раметры:  $A = 1$  Нп;  $B = 1$  рад;  $Z_c = 500 - j500$  Ом. Найдите сопротивления  $Z_1, 2Z_2$ .

**7.57.** Симметричный пассивный четырехполюсник согласован с нагрузкой ( $Z_n = Z_c$ ). Покажите, что комплексный коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению равен  $(A_{11} + \sqrt{A_{11}^2 - 1})^{-1}$ .

**7.58.** Найдите  $A$ -параметры составного четырехполюсника, представляющего собой согласованное каскадное соединение двух одинаковых симметричных четырехполюсников. Выразите  $A$ -параметры составного четырехполюсника через характеристические параметры  $Z_c$  и  $\Gamma$  элементарного четырехполюсника.

**7.59р.** Неавтономный четырехполюсник включен между источником напряжения и нагрузкой (рис. Т7.44). Считая известными  $Z$ -параметры четырехполюсника, определите следующие комплексные частотные характеристики четырехполюсника в прямом включении: а) комплексное входное сопротивление  $Z_{11}(j\omega) = \dot{U}_1/\dot{I}_1$ ; б) комплексный коэффициент передачи по напряжению  $K_{21}(j\omega) = \dot{U}_2/\dot{U}_1$ ; в) комплексный рабочий коэффициент передачи по напряжению  $K_p(j\omega) = \dot{U}_2/\dot{E}$ ; г) комплексный коэффициент передачи по току  $G_{21}(j\omega) = \dot{I}_2/\dot{I}_1$ ; д) комплексное выходное сопротивление  $Z_{22}(j\omega) = \dot{U}_2/\dot{I}_2$ .

**7.60.** Решите задачу 7.59р, считая известными  $Y$ -параметры четырехполюсника.

**7.61р.** Действующие значения гармонического напряжения на входе  $U_1$  и выходе  $U_2$  Г-образного четырехполюсника (рис. Т7.45) измеряют в заданном диапазоне частот. Как, используя результаты измерений, построить ФЧХ цепи?

**7.62.** Действующие значения гармонического напряжения на входе и выходе П-образного четырехполюсника (рис. Т7.46)  $U_1 = 1$  В,  $U_2 = 0,34$  В. Определите фазовый сдвиг между выходным и входным напряжениями четырехполюсника.

**7.63.** Для Г-образного четырехполюсника (рис. Т7.47) найдите комплексный коэффициент передачи по напряже-

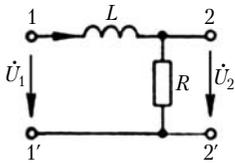


Рис. Т7.45

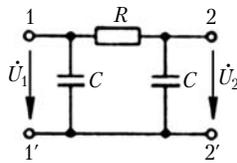


Рис. Т7.46

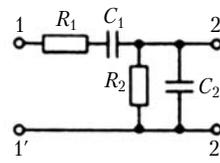


Рис. Т7.47

нию  $K_{21x}(j\omega)$  в режиме холостого хода на выходе. Рассчитайте и постройте АЧХ  $K_{21x}(\omega)$  и ФЧХ  $\psi_{21x}(\omega)$ , принимая  $R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$ ;  $C_1 = C_2 = 1 \text{ мкФ}$ .

**7.64м.** Постройте (ориентировочно, без расчетов) АЧХ  $K_{21x}(\omega)$  и ФЧХ  $\psi_{21x}(\omega)$  коэффициентов передачи четырехполосников по напряжению в режиме холостого хода на выходе. Схемы четырехполосников изображены на рис. Т7.48, а – д.

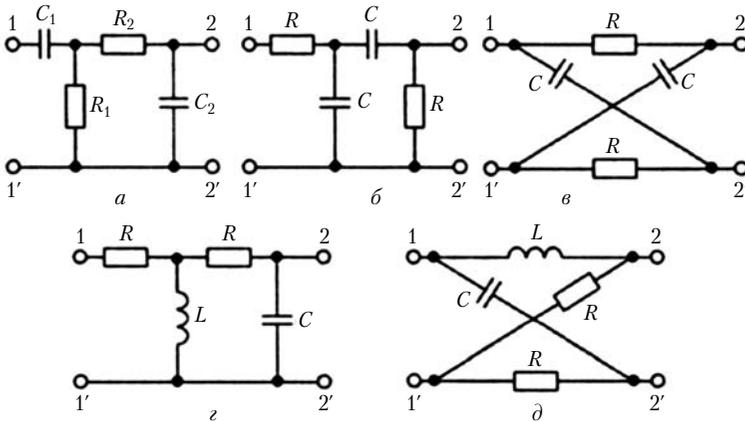


Рис. Т7.48

**7.65р.** Для мостового четырехполосника (рис. Т7.49) найдите комплексный коэффициент передачи по напряжению в режиме холостого хода на выходе  $K_{21x}(j\omega) = K_{21x}(\omega)e^{j\psi_{21x}(\omega)}$ . Рассчитайте и постройте графики функций  $K_{21x}(R_1)$  и  $\psi_{21x}(R_1)$ , считая, что сопротивление  $R_1$  изменятся от 0 до  $\infty$ , а параметры остальных элементов и частота входного гармонического напряжения  $\omega$  остаются постоянными:  $R = 1 \text{ кОм}$ ;  $L = 0,1 \text{ Гн}$ ;  $\omega = 10^4 \text{ рад/с}$ .

**7.66р.** Постройте (ориентировочно) графики функций  $K_{21x}(R_1)$  и  $\psi_{21x}(R_1)$  четырехполосников (рис. Т7.50, а – в),

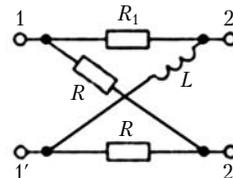


Рис. Т7.49

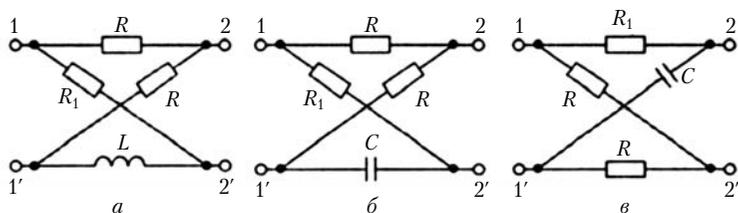


Рис. Т7.50

приняв, что параметры остальных элементов и частота входного воздействия не изменяются.

**7.67.** Найдите комплексный коэффициент передачи по напряжению  $K_{21x}(j\omega)$  мостового четырехполюсника (рис. Т7.51) в режиме холостого хода на выходе. Рассчитайте и постройте АЧХ  $K_{21x}(\omega)$  и ФЧХ  $\psi_{21x}(\omega)$  при  $R = 1$  кОм;  $C = 4$  мкФ.

**7.68.** Рассчитайте и постройте АЧХ  $K_{21x}(\omega)$  и ФЧХ  $\psi_{21x}(\omega)$  коэффициента передачи четырехполюсника по напряжению в режиме холостого хода на выходе. Схема четырехполюсника представлена на рис. Т7.52, где  $R = 1$  кОм;  $C = 2$  мкФ.

**7.69.** Найдите комплексное входное сопротивление мостового четырехполюсника (см. рис. Т7.48, д)  $Z_{11x}(j\omega) = Z_{11x}(\omega)e^{j\varphi_{11x}(\omega)}$  со стороны зажимов  $1 - 1'$  в режиме холостого хода на выходе. Рассчитайте и постройте графики функций  $Z_{11x}(\omega)$ ,  $\varphi_{11x}(\omega)$  при  $R = 0,1$  кОм;  $C = 1$  мкФ;  $L = 1$  Гн.

**7.70.** Определите комплексное входное сопротивление четырехполюсника (см. рис. Т7.48, з)  $Z_{11x}(j\omega)$  в прямом включении при разомкнутых зажимах  $2 - 2'$ .

**7.71м.** Постройте (ориентировочно, без расчетов) АЧХ  $Z_{11x}(\omega)$  и ФЧХ  $\varphi_{11x}(\omega)$  входных сопротивлений четырехполюсников со стороны зажимов  $1 - 1'$  в режиме холостого хода на выходе. Схемы четырехполюсников приведены на рис. Т7.48, а – д.

**7.72.** Сформулируйте условие равновесия ( $\dot{U}_2 = 0$  при  $\dot{U}_1 \neq 0$ ) мостового несимметричного четырехполюсника (см. рис. Т7.16). Будет ли это условие справедливо при произвольной нагрузке, подключенной к зажимам  $2 - 2'$ ?

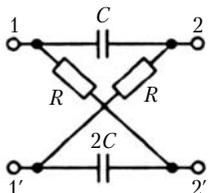


Рис. Т7.51

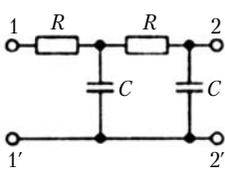


Рис. Т7.52

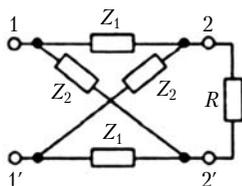


Рис. Т7.53

**7.73.** Покажите, что симметричный мостовой четырехполюсник, нагруженный на элемент  $Z_{н2} = R$  (рис. Т7.53), имеет постоянное входное сопротивление  $Z_{11}(j\omega)$  на любой частоте при выполнении условия  $Z_1 Z_2 = R^2$ .

### Решения и методические указания

**7.50р.** Определим характеристические сопротивления четырехполюсника

$$Z_{c1} = \sqrt{(A_{11}A_{12})/(A_{21}A_{22})}; Z_{c2} = \sqrt{(A_{22}A_{12})/(A_{21}A_{11})}.$$

Так как у рассматриваемого четырехполюсника  $A_{11} = A_{22} = 3$ , то  $Z_{c1} = Z_{c2} = \sqrt{A_{12}/A_{21}} = j2,83$  Ом.

Характеристическая постоянная передачи четырехполюсника  $\Gamma = \ln(\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12} + A_{21}}) = \ln(3 + 2\sqrt{2}) = 1,76$ . Учитывая, что  $\Gamma = A + jB$ , найдем  $A = 1,76$  Нп =  $8,686 \cdot 1,76 = 15,3$  дБ;  $B = 0$ .

Характеристическую постоянную передачи можно также определить, воспользовавшись выражением  $\text{ch } \Gamma = \sqrt{A_{11}A_{22}} = A_{11}$ , откуда  $\Gamma = \text{Arch } A_{11} = \text{Arch } 3 = 1,76$ .

**7.51р.** Для симметричного четырехполюсника, согласованного с нагрузкой, на входе и выходе которого действуют напряжения  $\dot{U}_1 = U_1 e^{j\psi_1}$ ;  $\dot{U}_2 = U_2 e^{j\psi_2}$ , постоянная ослабления  $A = \ln U_1 / \ln U_2$ , коэффициент фазы  $B = \psi_1 - \psi_2$ . Таким образом,  $A = \ln 5 = 1,6094$  Нп;  $B = -30^\circ = -\pi/6$  рад. Учитывая, что  $1$  Нп  $\approx 8,686$  дБ, получим  $A \approx 13,98$  дБ.

**7.55р.** Для рассматриваемого четырехполюсника  $A_{11} = 1 + Z_1(2Z_2)^{-1}$ ;  $A_{21} = Z_2^{-1}$ , кроме того,  $A$ -параметры четырехполюсника можно выразить и через характеристические параметры:  $A_{11} = \text{ch } \Gamma$ ;  $A_{21} = \frac{1}{Z_c} \text{ch } \Gamma$ . В результате запишем

$$Z_2 = Z_c \frac{1}{\text{sh } \Gamma}; \quad 0,5Z_1 = Z_c(\text{ch } \Gamma - 1) \frac{1}{\text{sh } \Gamma} = Z_c \text{th } \frac{\Gamma}{2}.$$

В общем случае характеристическая постоянная передачи представляет собой комплексное число:  $\Gamma = A + jB$ . Гиперболические функции комплексного аргумента вычислим с помощью выражений  $\text{sh}(x + jy) = \text{sh } x \cos y + j \text{ch } x \sin y$ ;  $\text{th}(x + jy) = (\text{th } x + j \text{th } y)(1 + j \text{th } x \text{th } y)^{-1}$ . По условию,  $\Gamma = 1 + j1$ . Следовательно,  $\text{sh } \Gamma = \text{sh}(1 + j1) = 0,635 + j1,299$ ;  $\text{th}(\Gamma/2) = \text{th}(0,5 + j0,5) = 0,564 + j0,404$ . Найдем искомые сопротивления:  $0,5Z_1 = Z_c \text{th}(\Gamma/2) = 80 + j484$  Ом;  $Z_2 = Z_c / \text{sh } \Gamma = 463 - j159$  Ом.

**7.59р.** Запишем основные уравнения четырехполюсника в форме  $Z$  для комплексных действующих значений напряжений и токов:

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2; \quad (\text{а})$$

$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2. \quad (\text{б})$$

Связь между напряжением и током на выходе четырехполюсника устанавливается законом Ома:  $\dot{U}_2 = -Z_{н2}\dot{I}_2$ . Знак «минус» в этом выражении соответствует выбранным положительным направлениям  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_2$ . Выражая  $\dot{U}_2$  через  $\dot{I}_2$ , найдем из уравнения (б) комплексный коэффициент передачи четырехполюсника по току:

$$G_{21}(j\omega) = \dot{I}_2/\dot{I}_1 = -Z_{21}(Z_{22} + Z_{н2}).$$

Комплексное входное сопротивление четырехполюсника в прямом включении определим из уравнения (а):

$$Z_{11}(j\omega) = \dot{U}_1/\dot{I}_1 = Z_{11} + Z_{12}G_{21}(j\omega),$$

откуда

$$Z_{11}(j\omega) = \frac{Z_{11}(Z_{22} + Z_{н2}) - Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_{н2}} = \frac{\Delta_z + Z_{11}Z_{н2}}{Z_{22} + Z_{н2}},$$

где  $\Delta_z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$  — определитель матрицы  $Z$ -параметров.

По определению комплексный коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению равен отношению  $\dot{U}_2/\dot{U}_1$ . С учетом того, что  $\dot{U}_1 = Z_{11}(j\omega)\dot{I}_1$ , а  $\dot{U}_2 = -Z_{н2}\dot{I}_2$ , запишем

$$K_{21}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{-Z_{н2}}{Z_{11}(j\omega)} G_{21}(j\omega).$$

После несложных преобразований получим

$$K_{21}(j\omega) = \frac{Z_{21}Z_{н2}}{Z_{11}(Z_{22} + Z_{н2}) - Z_{12}Z_{21}} = \frac{Z_{21}Z_{н2}}{\Delta_z + Z_{11}Z_{н2}}.$$

Рабочий коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению представляет собой отношение выходного напряжения  $\dot{U}_2$  к ЭДС  $\dot{E}$  источника сигнала:  $K_p(j\omega) = \dot{U}_2/\dot{E}$ .

Физически очевидно, что  $K_p(j\omega) = K_{21}(j\omega)$ , если внутреннее сопротивление источника входного напряжения равно нулю ( $Z_{н1} = 0$ ). В общем случае  $Z_{н1} \neq 0$  и коэффициент передачи входной цепи четырехполюсника по напряжению не равен единице, как это очевидно из рис. Т7.54, а.

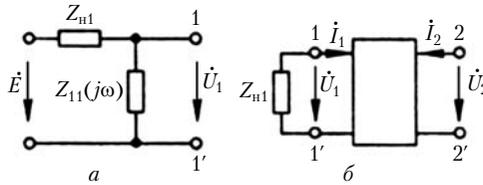


Рис. Т7.54

Представим  $K_p(j\omega)$  в виде

$$K_p(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{E}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \frac{\dot{U}_1}{\dot{E}} = K_{21}(j\omega) \frac{Z_{11}(j\omega)}{Z_{11}(j\omega) + Z_{н1}},$$

откуда после несложных преобразований найдем

$$K_p(j\omega) = \frac{Z_{21}Z_{н2}}{(Z_{11} + Z_{н1})(Z_{22} + Z_{н2}) - Z_{12}Z_{21}}.$$

Этот же результат можно получить иным путем. Заменяем рассматриваемый неавтономный четырехполюсник Т-образной схемой замещения и объединим последовательно включенные сопротивления  $Z_{н1}$  и  $(Z_{11} - Z_{12})$ . Это равносильно образованию нового четырехполюсника, у которого параметр  $Z_{11}$  стал равным  $Z_{11} + Z_{н1}$ , а напряжение  $\dot{E}$  действует непосредственно на его входе. Следовательно, выражение для  $K_p(j\omega)$  можно получить из выражения для  $K_{21}(j\omega)$ , заменив в последнем  $Z_{11}$  на  $Z_{11} + Z_{н1}$ .

Для определения выходного сопротивления  $Z_{22}(j\omega)$ , которое имеет смысл входного сопротивления четырехполюсника в обратном включении при  $\dot{E} = 0$ , рассмотрим схему (рис. Т7.54, б).

Учтя, что  $\dot{U}_1 = -Z_{н1}\dot{I}_1$ , из исходной системы уравнений получим

$$Z_{22}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{Z_{22}(Z_{11} + Z_{н1}) - Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_{н1}} = \frac{\Delta_z + Z_{22}Z_{н1}}{Z_{11} + Z_{н1}}.$$

Как и следовало ожидать из физических соображений,  $Z_{22}(j\omega)$  можно было бы получить непосредственно из выражения для  $Z_{11}(j\omega)$ , заменив  $Z_{11}$ ,  $Z_{22}$  и  $Z_{н2}$  на  $Z_{22}$ ,  $Z_{11}$  и  $Z_{н1}$  соответственно.

**7.61р.** Векторная диаграмма для рассматриваемой цепи приведена на рис. Т7.55. Очевидно, напряжение  $U_2$  отстает от напряжения  $U_1$  на угол  $\psi = \arccos U_2/U_1$ , который можно рассчитать по известным напряжениям  $U_1$  и  $U_2$ .

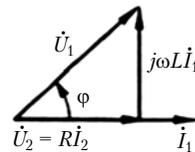


Рис. Т7.55

**7.64м.** Построение АЧХ и ФЧХ четырехполюсников целесообразно начать с упрощения исходных схем и рассмотрения соответствующих им векторных диаграмм. Такое упрощение может быть осуществлено путем исключения элементов, влияние которых на ход частотных характеристик в диапазоне очень низких ( $\omega \rightarrow 0$ ) или очень высоких ( $\omega \rightarrow \infty$ ) частот по физическим соображениям невелико.

На основании анализа векторных диаграмм можно составить приближенное представление об амплитудных и фазовых соотношениях в цепи. Следует учесть также, что сдвиг фаз  $\psi_{21}$  зависит от частоты монотонно, не имея ни разрывов непрерывности, ни экстремумов. Напротив, график  $K_{21}(\omega)$  может иметь экстремумы.

Если на границах частотного диапазона ( $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$ ) функция  $K_{21}(\omega) = 0$ , то внутри диапазона она имеет, по крайней мере, один экстремум, и если экстремум лишь один, то это — максимум. Если же экстремумов несколько, то их общее число должно быть нечетным, причем максимумы и минимумы чередуются. Судить о числе экстремумов, если основываться только на внешнем виде схемы цепи, можно лишь предположительно. Так, АЧХ  $K_{21}(\omega)$  четырехполюсника, состоящего из двух связанных колебательных контуров, может иметь один или три экстремума в зависимости от значения фактора связи. В сомнительных случаях следует осуществлять численный анализ соответствующего аналитического выражения. В связи с этим отметим, что АЧХ цепей, схемы которых приведены на рис. Т7.48, либо монотонны, либо имеют только один экстремум.

Рассмотрим цепь рис. Т7.48, а. На очень низких частотах АЧХ и ФЧХ цепи определяются в основном элементами  $C_1$ ,  $R_1$ . Ход графиков приблизительно такой же, как для однозвенной цепи  $C_1R_1$  (участок 1 на рис. Т7.56, а, б). На очень высоких частотах главное влияние на вид АЧХ и ФЧХ оказывают элементы  $R_2$ ,  $C_2$  (участок 2 на рис. Т7.56). На сред-

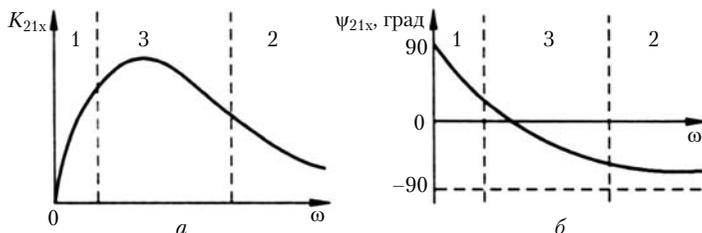


Рис. Т7.56

них частотах ход графиков предположительно соответствует участку 3 на рис. Т7.56.

**7.65р.**  $Z$ -параметры несимметричного мостового четырехполюсника общего вида (см. рис. 7.16) были найдены при решении задачи 7.16р. Учтя, что для рассматриваемого случая  $Z_1 = R_1$ ;  $Z_2 = j\omega L$ ;  $Z_3 = Z_4 = R$ , получим

$$K_{21}(j\omega) = \frac{Z_{21}}{Z_{11}} = \frac{j\omega LR - R_1 R}{2R(R_1 + j\omega L)} = 0,5 \frac{-1 + j \frac{\omega L}{R_1}}{1 + j \frac{\omega L}{R_1}}.$$

Построим векторы, изображающие комплексные числа  $-1 + j\omega L/R_1$  и  $1 + j\omega L/R_1$  на комплексной плоскости (рис. Т7.57, а). Очевидно, модуль отношения этих комплексных чисел равен единице, а аргумент отношения  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\arctg \frac{R_1}{\omega L}$ . Следовательно,  $K_{21x}(\omega) = 0,5 = \text{const}$ ;  $\psi_{21x}(\omega) = 2\arctg \frac{R_1}{\omega L}$ .

По этим формулам нетрудно построить графики функций  $K_{21x}(R_1)$  и  $\psi_{21x}(R_1)$ . При изменении  $R_1$  от 0 до  $\infty$   $\psi_{21x}$  изменяется от 0 до  $180^\circ$ , а  $K_{21x} = \text{const}$  (рис. Т7.57, б, в).

Таким образом, при неизменной амплитуде  $U_{m1}$  входного напряжения  $u_1(t)$  выходное напряжение  $u_2(t)$  опережает входное на угол  $\psi_{21x}$ , значение которого в зависимости от сопротивления  $R_1$  заключено в пределах  $0 - 180^\circ$ , причем

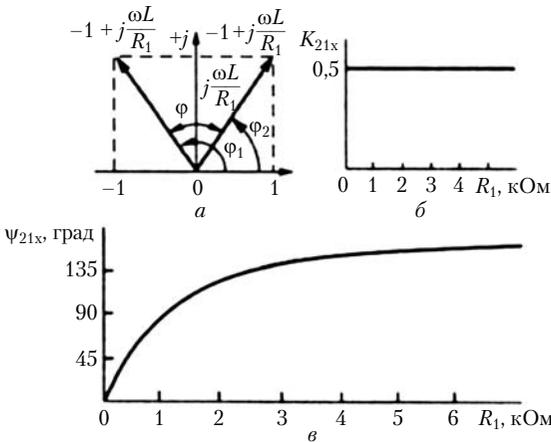


Рис. Т7.57

амплитуда выходного напряжения  $U_{m2}$  при любых  $R_1$  неизменна и составляет  $0,5U_{m1}$ .

**7.66р.** Четырехполюсники, изображенные на рис. Т7.50,  $a - в$ , однотипны, и зависимости  $K_{21x}(R_1)$  и  $\psi_{21x}(R_1)$  можно проанализировать точно так же, как это сделано в предыдущей задаче. Представление о характере этих зависимостей можно составить и с помощью простых графических построений. Рассмотрим сначала четырехполюсник (см. рис. Т7.49). Решение для него уже известно и будет служить эталоном.

Преобразуем схему четырехполюсника так, как показано на рис. Т7.58,  $a$ . В соответствии с рис. Т7.58,  $a$  запишем

$$\dot{U}_L = \dot{U}_1 \frac{j\omega L}{R_1 + j\omega L} = \dot{U}_1 \frac{1}{1 - j \frac{R_1}{\omega L}}; \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_L - 0,5\dot{U}_1.$$

Принимая начальную фазу входного напряжения  $u_1(t)$  равной нулю ( $\dot{U}_1 = U_1$ ), найдем вещественную и мнимую составляющие напряжения  $\dot{U}_L$ :  $\text{Re } \dot{U}_L = U_1(1 + \alpha^2)^{-1}$ ;  $\text{Im } \dot{U}_L = U_1\alpha(1 + \alpha^2)^{-1}$ ;  $\alpha = R_1/(\omega L)$  и изобразим их на комплексной плоскости (рис. Т7.58,  $б$ ).

Согласно рис. Т7.58,  $б$

$$U_L = \sqrt{|\text{Re } \dot{U}_L|^2 + |\text{Im } \dot{U}_L|^2} = U_1 \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha}} = U_1 \cos \psi.$$

Как известно из аналитической геометрии, последнее соотношение представляет собой уравнение окружности в полярных координатах, если окружность проходит через начало координат, а ее диаметр численно равен  $U_1$ .

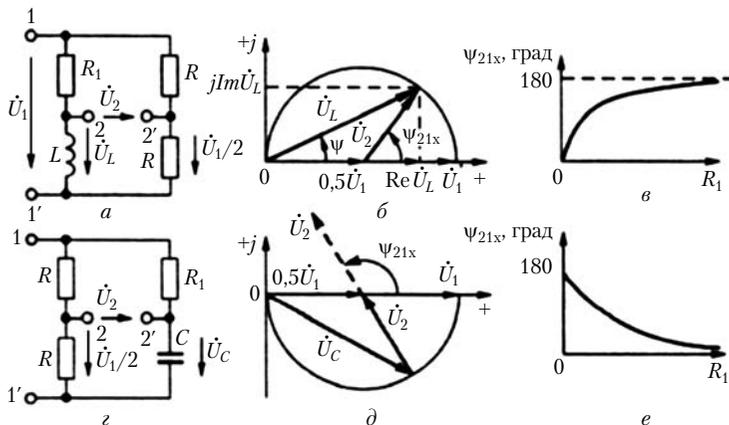


Рис. Т7.58

При изменении сопротивления  $R_1$  длина вектора  $\dot{U}_L$  и его положение на комплексной плоскости изменяются, причем конец вектора  $\dot{U}_L$  перемещается по полуокружности диаметром  $U_1$ , расположенной в первом квадранте (см. рис. Т7.58, б). Полуокружность, расположенная в четвертом квадранте, исключается из рассмотрения, поскольку  $\text{Im} \dot{U}_L \geq 0$ .

Длина вектора  $\dot{U}_2 = \dot{U}_L - 0,5\dot{U}_1$  (см. рис. Т7.58, б) равна радиусу указанной окружности, т.е.  $0,5U_1$ , а его положение относительно  $\dot{U}_1$  может изменяться в широких пределах. При  $R_1 = 0$ ,  $\dot{U}_L = \dot{U}_1$ ,  $\psi_{21x} = 0$ . При  $R_1 = \infty$ ,  $\dot{U}_L = 0$ ;  $\psi_{21x} = 180^\circ$ .

Таким образом,  $K_{21x}(R_1) = 0,5 = \text{const}$ , а напряжение  $u_2(t)$  опережает  $u_1(t)$  на угол  $\psi_{21x}$ , зависимость которого от  $R_1$  показана на рис. Т7.58, в. Эти данные полностью согласуются с результатами решения задачи 7.65р.

Аналогичным образом изучают характеристики  $K_{21x}(R_1)$  и  $\psi_{21x}(R_1)$  и во всех остальных случаях. Ограничимся тем, что преобразуем схему четырехполюсника, представленного на рис. Т7.50, б, и приведем для него векторную диаграмму и график  $\psi_{21x}(R_1)$  (рис. Т7.58, г – е).

Четырехполюсники, изображенные на рис. Т7.49 и Т7.50, принадлежат к группе цепей, называемых фазовращателями. Фазовращатели позволяют обеспечить регулируемый сдвиг фаз между выходными и входными напряжениями, сохраняя неизменными отношение их амплитуд.

**7.71м.** Сдвиг фаз  $\varphi_{11}$  между напряжением и током на входе любого линейного пассивного четырехполюсника не может превышать по абсолютному значению  $90^\circ$ . Предположение о возможности существования  $|\varphi_{11}| > 90^\circ$  ведет к неприемлемому по физическим соображениям заключению, что вещественная составляющая входного сопротивления четырехполюсника отрицательна [ $\text{Re} Z_{11}(j\omega) = Z_{11}(\omega) \cos \varphi_{11} < 0$ ]. Поэтому во всех случаях  $|\varphi_{11}(\omega)| \leq 90^\circ$ .

Перемена знака  $\varphi_{11}(\omega)$  на некоторой частоте возможна лишь при наличии в четырехполюснике реактивных элементов обоих типов – как индуктивных, так и емкостных. Только в этом случае возможно также нарушение монотонного характера зависимости  $Z_{11x}(\omega)$  и возникновение экстремумов.

При построении ориентировочных графиков  $Z_{11x}(\omega)$ ,  $\varphi_{11x}(\omega)$  следует представить их ход на очень низких ( $\omega \rightarrow 0$ ) и очень высоких ( $\omega \rightarrow \infty$ ) частотах.

Рассмотрим цепь (см. рис. Т7.48, а). Входное сопротивление этой цепи на всех частотах, исключая  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$ ,

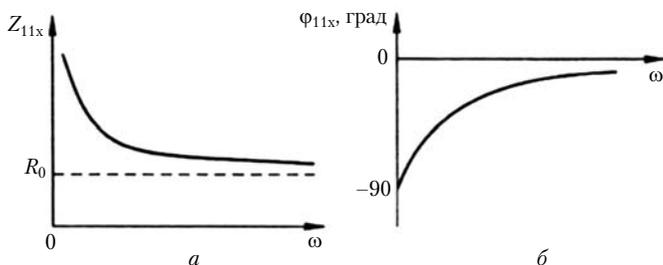


Рис. Т7.59

имеет резистивно-емкостный характер, т.е.  $\varphi_{11x}(\omega) < 0$ . На очень низких частотах входное сопротивление определяется элементами  $C_1, R_1$ ; при  $\omega \rightarrow 0 Z_{11x}(\omega) \rightarrow \infty$ ;  $\varphi_{11x}(\omega) \rightarrow -90^\circ$ . При  $\omega \rightarrow \infty$  сопротивления емкостных ветвей становятся пренебрежимо малыми, элементы  $R_1$  и  $R_2$  фактически будут включены параллельно зажимам  $1 - 1'$ ,  $Z_{11x}(\omega) \rightarrow R_0$  (для  $R_1 = R_2 = R, R_0 = R/2$ ),  $\varphi_{11x}(\omega) \rightarrow 0$ .

Таким образом, при увеличении частоты от 0 до  $\infty Z_{11x}(\omega)$  уменьшается от  $\infty$  до  $0,5R$ , а  $\varphi_{11x}(\omega)$ , оставаясь все время отрицательным, уменьшается по абсолютному значению от  $90^\circ$  до 0 (рис. Т7.59, а, б).

### 7.4. Невзаимные проходные четырехполюсники

7.74м. Покажите, что четырехполюсники рис. Т7.60, а, б не являются взаимными.

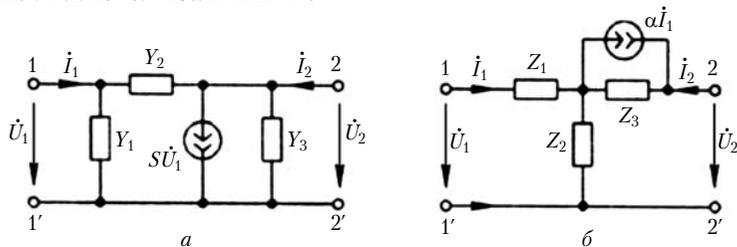


Рис. Т7.60

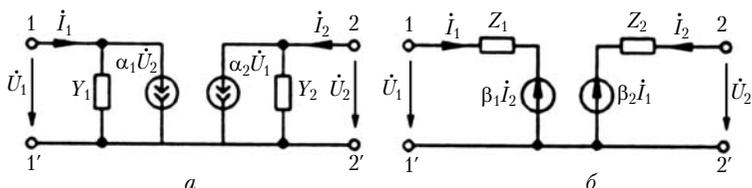


Рис. Т7.61

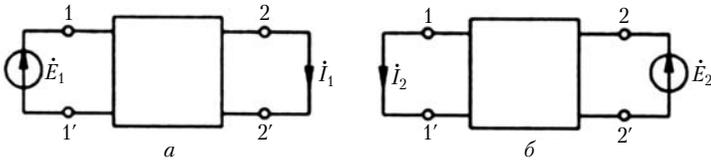


Рис. Т7.62

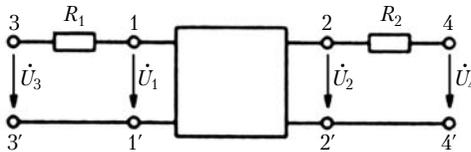


Рис. Т7.63

**7.75.** При каких соотношениях между параметрами элементов четырехполюсники, изображенные на рис. Т7.61, *а*, *б*, являются взаимными?

**7.76.** Над линейным неавтономным четырехполюсником проделаны два опыта (рис. Т7.62, *а*, *б*). В обоих опытах ЭДС  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$  заданы, а токи  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$  измерены. Каким должен быть ток  $\dot{I}_2$ , чтобы можно сделать вывод о том, что четырехполюсник: *а*) взаимный; *б*) невзаимный? Возьмите  $\dot{E}_1 = 1$  В,  $\dot{E}_2 = 2$  В,  $\dot{I}_1 = 2e^{j30^\circ}$  мА.

**7.77р.** При приложении внешнего воздействия на цепь (рис. Т7.63) к зажимам 3 – 3' (зажимы 4 – 4' разомкнуты) напряжения в цепи принимают следующие значения:  $\dot{U}_1 = 0,5$  В;  $\dot{U}_2 = \dot{U}_4 = 0,25$  В;  $\dot{U}_3 = 1$  В. При подаче внешнего воздействия на зажимы 4 – 4' и разомкнутых зажимах 3 – 3'  $\dot{U}_2 = 1,2$  В;  $\dot{U}_1 = \dot{U}_3 = 0,1$  В;  $\dot{U}_4 = 2$  В;  $R_1 = 200$  Ом;  $R_2 = 400$  Ом. Является ли четырехполюсник, входящий в состав исследуемой цепи, взаимным?

**7.78.** Схема замещения трехкаскадного усилителя приведена на рис. Т7.64. Определите отношение напряжений  $u_{\text{вых}}/u_{\text{вх}}$ .

**7.79.** Схема четырехполюсника приведена на рис. Т7.65. При каком значении  $K$  отношение  $u_1/i_1$  отрицательно?

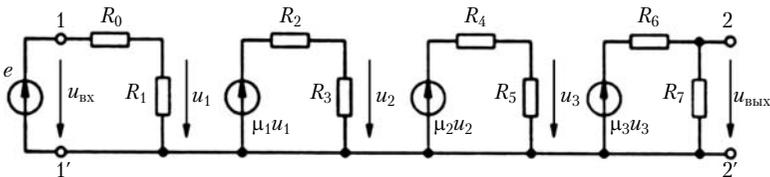


Рис. Т7.64

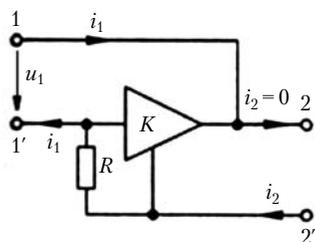


Рис. Т7.65

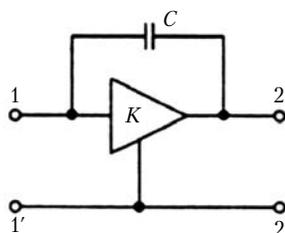


Рис. Т7.66

**7.80.** Определите эквивалентную емкость между зажимами 1 — 1' цепи рис. Т7.66. Как можно использовать емкостный эффект?

**7.81.** Покажите, что цепь, изображенная на рис. Т7.67, позволяет одновременно производить операции суммирования и интегрирования входных напряжений  $u_1, u_2, \dots, u_n$ .

**7.82.** Сопротивление  $R_3$  цепи рис. Т7.68 изменяется под действием внешнего фактора (например, температуры, давления, освещенности) по закону  $R_3 = R_2(1 + \alpha)$ . Докажите, что напряжение  $u_2$  на выходе цепи пропорционально коэффициенту  $\alpha$ . Возьмите  $E_- = \text{const}$ .

**7.83м.** Покажите, что активный четырехполюсник (рис. Т7.69) является идеальным инвертором сопротивления.

**7.84м.** Покажите, что активный четырехполюсник (рис. Т7.70) является идеальным конвертором сопротивле-

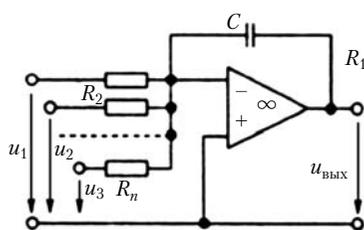


Рис. Т7.67

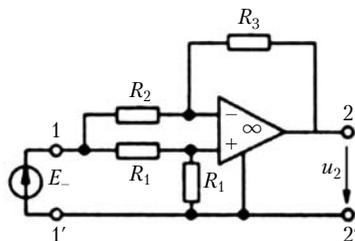


Рис. Т7.68

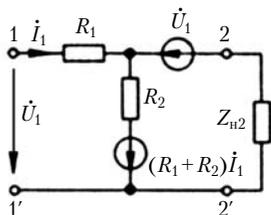


Рис. Т7.69

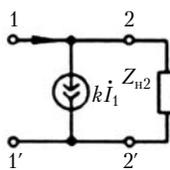


Рис. Т7.70

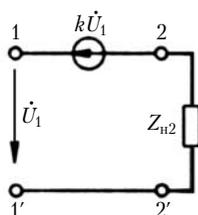


Рис. Т7.71

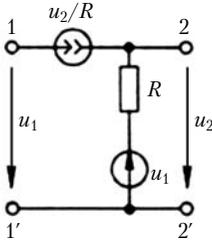


Рис. Т7.72

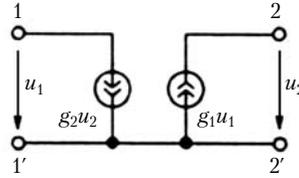


Рис. Т7.73

ния. При каком значении коэффициента  $k$  этот четырехполюсник работает как конвертор отрицательного сопротивления?

**7.85м.** Решите задачу 7.84 для четырехполюсника, изображенного на рис. Т7.71.

**7.86.** Определите эквивалентную индуктивность между зажимами 1 – 1' цепи (рис. Т7.72) при условии, что к зажимам 2 – 2' подключен элемент  $C$ . Как можно использовать индуктивный эффект?

**7.87.** Найдите эквивалентную индуктивность между зажимами 2 – 2' цепи (рис. Т7.72) при условии, что к зажимам 1 – 1' подключен элемент  $C$ .

**7.88.** Рассчитайте эквивалентную индуктивность между зажимами 1 – 1' цепи (рис. Т7.73) при условии, что к зажимам 2 – 2' подключен элемент  $C$ .

**7.89.** В цепи (рис. Т7.74) четырехполюсник  $A$  задан своими  $Y$ -параметрами; четырехполюсник  $B$  является идеальным инвертором сопротивления (коэффициент инверсии  $K_{инв} > 0$ ). Найдите комплексный коэффициент передачи цепи по напряжению от зажимов 1 – 1' к зажимам 2 – 2'  $K_{21}(j\omega)$ .

**7.90р.** Определите комплексный коэффициент передачи по напряжению  $K_{21}(j\omega)$  четырехполюсника (рис. Т7.75), в состав которого входит идеальный операционный усилитель.

**7.91.** Решите задачу 7.90р для четырехполюсника, изображенного на рис. 7.76.

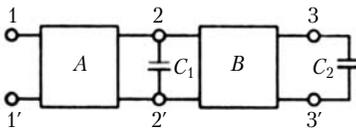


Рис. Т7.74

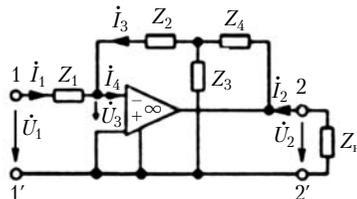


Рис. Т7.75

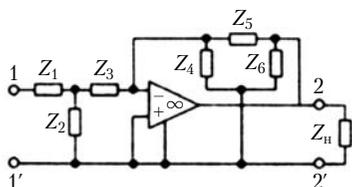


Рис. Т7.76

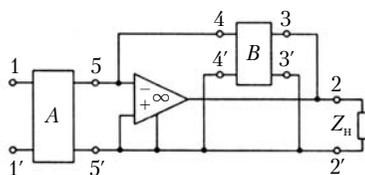


Рис. Т7.77

**7.92.** В состав четырехполюсника (рис. Т7.77) входят идеальный операционный усилитель, а также обратимые четырехполюсники  $A$  и  $B$ , для которых известны матрицы  $Y$ -параметров  $Y_A$  и  $Y_B$ . Входом четырехполюсника  $A$  являются зажимы  $1 - 1'$ , а входом четырехполюсника  $B$  — зажимы  $3 - 3'$ .

Найдите комплексный коэффициент передачи по напряжению  $K_{21}(j\omega)$  составного четырехполюсника.

### Решения и методические указания

**7.74 м.** Для рис. Т7.60, *a* запишите уравнения электрического равновесия по методу узловых напряжений, сравните их с основными уравнениями четырехполюсника в форме  $Y$  и убедитесь, что  $Y_{12} \neq Y_{21}$ .

Для рис. Т7.60, *б* замените источник тока эквивалентным источником напряжения, составьте для преобразованной схемы уравнения электрического равновесия по методу контурных токов. Затем, сравнивая полученные уравнения с основными уравнениями четырехполюсника в форме  $Z$ , убедитесь, что  $Z_{12} \neq Z_{21}$ .

**7.77р.** Четырехполюсник является взаимным (обратимым), если его  $Z$ -параметры удовлетворяют условию  $Z_{12} = Z_{21}$ .

Из уравнений четырехполюсника в форме  $Z$  следует, что

$$Z_{21} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{i_2=0}; \quad Z_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{i_1=0}.$$

Ток  $\dot{I}_1$  в режиме холостого хода на выходе ( $\dot{I}_2 = 0$ ) найдем по известным значениям напряжений  $\dot{U}_3, \dot{U}_1$  и сопротивления  $R_1$ :  $\dot{I}_1 = (\dot{U}_3 - \dot{U}_1)/R_1$ . Аналогичным образом определим  $\dot{I}_2 = (\dot{U}_4 - \dot{U}_4)/R_2$  ( $\dot{I}_1 = 0$ ).

Таким образом,

$$Z_{21} = R_1 \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_3 - \dot{U}_1} \Big|_{i_2=0} = 100 \text{ Ом}; \quad Z_{12} = R_2 \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_4 - \dot{U}_2} \Big|_{i_1=0} = 50 \text{ Ом}$$

и рассматриваемый четырехполюсник является невзаимным.

**7.83м–7.85м.** При определении входного сопротивления нагруженного неавтономного четырехполюсника последний можно рассматривать как неавтономный двухполюсник и применить метод пробного источника (см. п. 4.2).

**7.90р.** Операционный усилитель — идеальный, поэтому можно принять  $\dot{U}_3 = 0$ ,  $\dot{I}_4 = 0$ . При этом  $\dot{I}_1 = \dot{U}_1/Z_1$ ;  $\dot{I}_3 = \dot{U}_2 Z_{23} [(Z_4 + Z_{23})Z_2]^{-1}$ , где  $Z_{23} = Z_2 Z_3 / (Z_2 + Z_3)$ ;  $\dot{I}_1 + \dot{I}_3 = 0$ . Отсюда следует, что

$$K_{21}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = - \left[ \frac{Z_2 + Z_4}{Z_1} + \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3} \right].$$

## 7.5. Электрические фильтры

**7.93р.** Определите параметры  $L$  и  $C$  однозвенного фильтра нижних частот типа  $k$ . Частота среза  $\omega_c = 10^4$  рад/с. Сопротивление нагрузки  $R_H = 1$  кОм согласовано с фильтром на частоте  $\omega = 0$ .

**7.94.** Однозвенный фильтр верхних частот типа  $k$  имеет частоту среза  $\omega_c = 10^4$  рад/с и согласован с нагрузкой сопротивлением  $R_H = 1$  кОм на частоте  $\omega = \infty$ . Найдите параметры  $L$  и  $C$ .

**7.95.** На вход однозвенного симметричного фильтра нижних частот типа  $k$  поступает напряжение  $u_1(t) = 2\cos(0,5 \cdot 10^4 t) + 2\cos(1,5 \cdot 10^4 t)$  В. Параметры элементов фильтра:  $L = 0,2$  Гн;  $C = 0,2$  мкФ. Принимая, что фильтр нагружен на сопротивление, равное характеристическому, найдите напряжение  $u_2(t)$  на выходе фильтра.

**7.96м.** Решите задачу 7.95 в предположении, что фильтр состоит из двух одинаковых звеньев типа  $k$  с теми же значениями параметров элементов.

**7.97р.** Полагая, что однозвенный фильтр нижних частот типа  $k$ , изображенный на рис. Т7.78, согласован с сопротив-

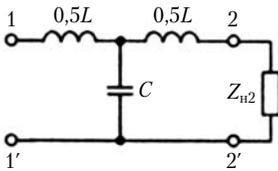


Рис. Т7.78

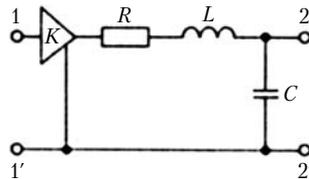


Рис. Т7.79

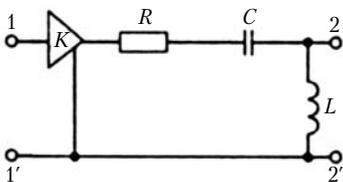


Рис. Т7.80

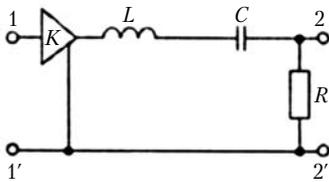


Рис. Т7.81

лением нагрузки во всем диапазоне частот ( $Z_n = Z_c$ ), рассчитайте и постройте АЧХ  $K_{21}(\omega)$  и ФЧХ  $\psi_{21}(\omega)$  фильтра.

**7.98р.** Решите задачу 7.97р, принимая, что сопротивление нагрузки имеет резистивный характер и согласовано с фильтром на частоте  $\omega = 0$ , т.е.  $Z_{n2} = R_n = \lim_{\omega \rightarrow 0} Z_{ct}$ .

**7.99р.** На рис. Т7.79–Т7.81 изображены цепи с идеальными усилителями напряжения. По сути, как показано ниже, это модели активных  $RC$ -фильтров второго порядка. Представьте операторный коэффициент передачи по напряжению  $K_{21}(p)$  цепи рис. Т7.79 в виде

$$K_{21}(p) = H\omega_0^2 / \left[ p^2 + \frac{\omega_0}{Q}p + \omega_0^2 \right],$$

где  $H$ ,  $\omega_0$  и  $Q$  — некоторые вещественные параметры. Выясните физический смысл этих параметров. Рассчитайте и постройте графики АЧХ  $K_{21}(\omega)$  для  $Q = 2; 1; 1/\sqrt{2}$ . Покажите, что цепь с таким коэффициентом передачи может быть использована как фильтр нижних частот.

**7.100р.** Получите выражение для операторного коэффициента передачи  $K_{21}(p)$  цепи (см. рис. Т7.80) в виде

$$K_{21}(p) = Hp^2 / \left[ p^2 + \frac{\omega_0}{Q}p + \omega_0^2 \right].$$

Выясните физический смысл параметров  $H$ ,  $\omega$ ,  $Q$ . Рассчитайте и постройте графики АЧХ  $K_{21}(\omega)$  для  $Q = 2; 1; 1/\sqrt{2}$ . Покажите, что цепь с таким коэффициентом передачи может быть использована как фильтр верхних частот.

**7.101р.** Получите выражение для операторного коэффициента передачи по напряжению  $K_{21}(p)$  цепи рис. Т7.81 в виде

$$K_{21}(p) = H\frac{\omega_0}{Q}p / \left[ p^2 + \frac{\omega_0}{Q}p + \omega_0^2 \right].$$

Выясните физический смысл параметров  $H$ ,  $\omega_0$ ,  $Q$ . Рассчитайте и постройте графики АЧХ  $K_{21}(\omega)$  для  $Q = 2; 5; 10$ .

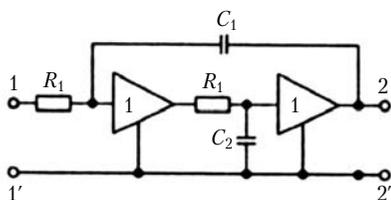


Рис. T7.82

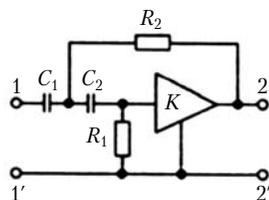


Рис. T7.83

Покажите, что цепь с таким коэффициентом передачи может быть использована как полосовой фильтр.

**7.102.** Представьте операторный коэффициент передачи по напряжению  $K_{21}(p)$  цепи (рис. T7.82) в одном из трех возможных видов (см. задачи 7.99р–7.101р). Полагая  $\omega_0$ ,  $Q$  и  $R_1$  заданными, найдите  $C_1$  и  $C_2$ .

**7.103.** Получите операторный коэффициент передачи по напряжению  $K_{21}(p)$  цепи (рис. T7.83) и приведите его к одному из трех возможных видов (см. задачи 7.99р–7.101р). Полагая  $\omega_0$ ,  $Q$  и  $R_1 = R_2 = R$  заданными, найдите  $C_1 = C_2 = C$  и  $K$ .

**7.104.** Определите операторный коэффициент передачи по напряжению  $K_{21}(p)$  цепи (рис. T7.84). Преобразуйте это выражение к одному из трех возможных видов (см. задачи 7.99р–7.101р). Полагая  $\omega_0$ ,  $Q$  и  $R_1 = R_2 = R$  заданными, найдите  $C_1$  и  $C_2$ .

**7.105.** Представьте операторный коэффициент передачи по напряжению  $K_{21}(p)$  цепи рис. T7.85 к одному из трех возможных видов (см. задачи 7.99р–7.101р). Выразите параметры  $H$ ,  $\omega_0$  и  $Q$  через параметры элементов цепи.

**7.106.** Решите задачу 7.105 для цепи (рис. T7.86).

**7.107.** Получите операторный коэффициент передачи по напряжению  $K_{21}(p)$  цепи (рис. T7.87) в одном из трех возможных видов (см. задачи 7.99р–7.101р). Полагая  $\omega_0$ ,  $Q$  и  $R_1 = R_2 = R$  заданными, найдите  $C_1 = C_2 = C$  и  $K$ .

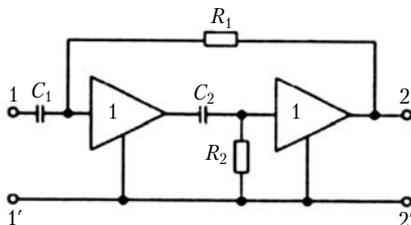


Рис. T7.84

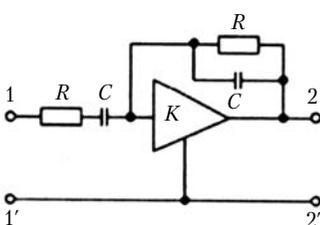


Рис. T7.85

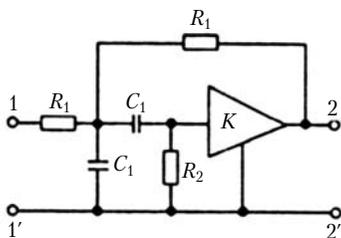


Рис. Т7.86

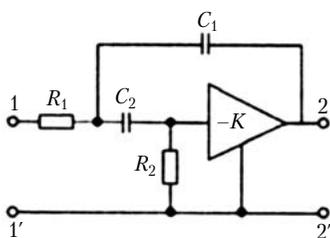


Рис. Т7.87

**7.108р.** Определите операторный коэффициент передачи по напряжению  $K_{21}(p)$  четырехполюсника с идеальным операционным усилителем (рис. Т7.88).

**7.109м.** Представьте операторный коэффициент передачи по напряжению  $K_{21}(p)$  цепи (рис. Т7.89) в одном из трех возможных видов (см. задачи 7.99р–7.101р). Выразите параметры  $H$ ,  $\omega_0$ ,  $Q$  через параметры элементов фильтра.

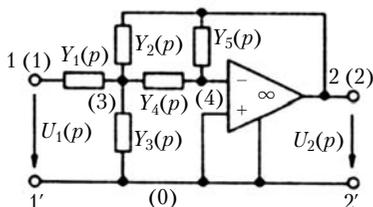


Рис. Т7.88

**7.110м.** Решите задачу 7.109м для цепи (рис. Т7.90).

**7.111м.** Решите задачу 7.109м для цепи (рис. Т7.91).

**7.112.** Решите задачу 7.109м для цепи (рис. Т7.92).

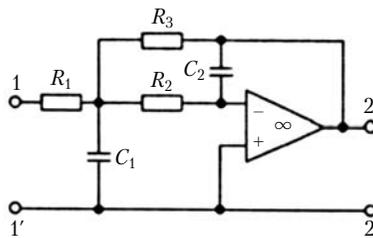


Рис. Т7.89

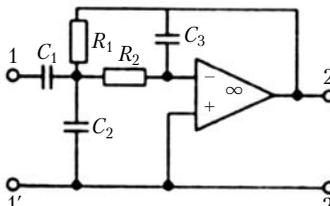


Рис. Т7.90

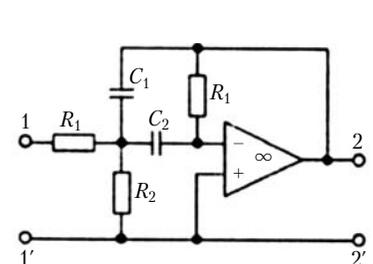


Рис. Т7.91

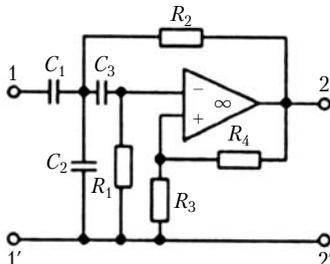


Рис. Т7.92

**7.113.** По данным задачи 7.89 получите операторный коэффициент передачи цепи (см. рис. Т7.74) по напряжению от зажимов 1 — 1' к зажимам 2 — 2'  $K_{21}(p)$  в одном из трех возможных видов (см. задачи 7.99р—7.101р).  $Y$ -параметры четырехполюсника  $A$  и коэффициент инверсии  $k_{\text{инв}}$  считайте вещественными. Выразите параметры  $H$ ,  $\omega_0$  и  $Q$  через параметры элементов цепи.

### Решения и методические указания

**7.93р.** Схемы однозвенных Т- и П-образного фильтров нижних частот типа  $k$  приведены на рис. Т7.42 и Т7.43, причем  $Z_1 = j\omega L$ , а  $Z_2 = 1/(j\omega C)$ . Учтя, что на частоте среза фильтра нижних частот должно выполняться условие  $Z_1 = -4Z_2$ , найдем частоту среза фильтра:  $\omega_c = 2/\sqrt{LC}$ . Выразим через частоту  $\omega_c$  характеристические сопротивления фильтров (см. рис. Т7.42 и Т7.43):

$$Z_{cT} = \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - (\omega/\omega_c)^2};$$

$$Z_{c\Pi} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - (\omega/\omega_c)^2}.$$

По условию задачи нагрузка  $R_n$  согласована с фильтром на частоте  $\omega = 0$ , т.е.  $R_n = Z_{cT}|_{\omega=0} = Z_{c\Pi}|_{\omega=0} = \sqrt{L/C}$ . Используя приведенные соотношения, находим  $L = 2R_n/\omega_c = 0,2$  Гн;  $C = 2/(\omega_c R_n) = 0,2$  мкФ.

**7.96м.** Характеристическая постоянная передачи фильтра, состоящего из двух идентичных звеньев, в 2 раза больше характеристической постоянной передачи однозвенного фильтра. Нагрузка предполагается согласованной с фильтром.

**7.97р.** Границы полосы пропускания рассматриваемого реактивного фильтра определим из условий  $Z_1 = 0$ ,  $Z_1 = -4Z_2$ . В данном случае  $Z_1 = j\omega L$ ,  $Z_2 = 1/(j\omega C)$ , следовательно, полоса пропускания простирается от  $\omega = 0$  до  $\omega_c = 2/\sqrt{LC}$ .

Выпишем общие соотношения, определяющие постоянные ослабления и фазы согласованного реактивного фильтра.

В полосе пропускания  $A = 0$ ;  $B = \arccos\left[1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right]$ ; вне полосы пропускания  $A = \text{Arch}\left|1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right|$ ;  $\sin B = 0$ . Применительно

к рассматриваемому фильтру нижних частот эти общие соотношения принимают вид

$$A = 0; \quad B = \arccos[1 - 2(\omega/\omega_c)^2] \quad \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_c;$$

$$A = \text{Arch}[1 - 2(\omega/\omega_c)^2]; \quad \sin B = 0 \quad \text{при } \omega > \omega_c.$$

Следовательно, вне полосы пропускания постоянная фазы  $B$  не зависит от частоты ( $\sin B = 0$ ). В полосе пропускания постоянная  $B$  зависит от частоты, причем при  $\omega = \omega_c$   $B = \pi$ . Так как функция  $B(\omega)$  всюду непрерывна, включая точку  $\omega = \omega_c$ , то вне полосы пропускания  $B = \pi$ .

Выражение для характеристической постоянной передачи  $\Gamma = \ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = A + jB$  позволяет установить связь между постоянными  $A$ ,  $B$  и комплексным коэффициентом передачи цепи по напряжению:

$$K_{21}(j\omega) = \dot{U}_2/\dot{U}_1 = K_{21}(\omega)e^{j\psi_{21}(\omega)}.$$

В результате получим  $K_{21}(\omega) = e^A$ ;  $\psi_{21}(\omega) = -B$ .

Графики АЧХ и ФЧХ фильтра показаны на рис. Т7.93, а, б сплошными линиями.

Полученные здесь формулы и графики основаны на предположении, что фильтр согласован с нагрузкой  $Z_{н2}$  во всем диапазоне частот, т.е.

$$Z_{н2} = Z_{сТ} = \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - (\omega/\omega_c)^2}.$$

Такое согласование в принципе невозможно, если нагрузка фильтра имеет чисто резистивный характер:  $Z_{н2} = R$ .

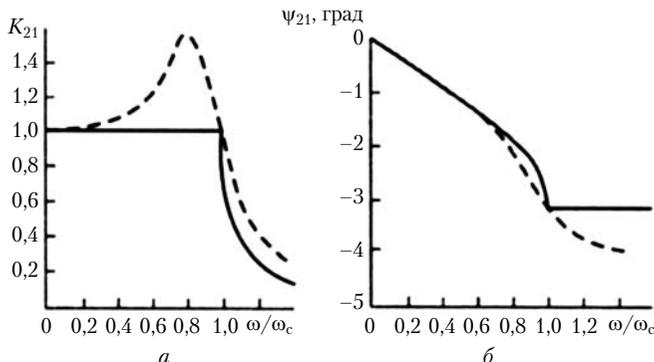


Рис. Т7.93

В этом случае частотные характеристики фильтра значительно отличаются от полученных ранее (см. задачу 7.98р).

**7.98р.** Комплексный коэффициент передачи неавтономного четырехполюсника по напряжению легко находится непосредственно из основных уравнений четырехполюсника в форме  $A$ :

$$K_{21}(j\omega) = \frac{1}{A_{11} + A_{12}/Z_{н2}}.$$

$A$ -параметры рассматриваемого четырехполюсника имеют вид  $A_{11} = 1 + Z_1/(2Z_2)$ ,  $A_{12} = Z_1[1 + Z_1/(4Z_2)]$ , где  $Z_1 = j\omega L$ ,  $Z_2 = 1/(j\omega C)$ .

По условию задачи четырехполюсник согласован с нагрузкой на частоте  $\omega = 0$ . Характеристическое сопротивление четырехполюсника (см. решение задачи 7.97р)

$$Z_{сГ} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - (\omega/\omega_c)^2} \quad (\omega_c = 2/\sqrt{LC}).$$

Следовательно,  $Z_{н2} = R = \sqrt{L/C}$ .

Преобразуя исходное выражение для  $K_{21}(j\omega)$  с учетом приведенных ранее соотношений для  $A$ -параметров и  $Z_{н2}$ , получим  $K_{21}(j\omega) = [(1 - 2\bar{\omega}^2) + j2\bar{\omega}(1 - \bar{\omega}^2)]^{-1}$ , где  $\bar{\omega} = \omega/\omega_c$  — нормированная частота.

Из последнего выражения следует, что

$$K_{21}(\bar{\omega}) = [(1 - 2\bar{\omega}^2)^2 - 4\bar{\omega}^2(1 - \bar{\omega}^2)^2]^{-1/2}; \quad \psi_{21}(\bar{\omega}) = -\arctg \frac{2\bar{\omega}(1 - \bar{\omega}^2)}{1 - 2\bar{\omega}^2}.$$

АЧХ и ФЧХ четырехполюсника даны пунктиром на рис. Т7.93,  $a, б$ .

**7.99р.** Очевидно, что

$$K_{21}(p) = \frac{K(1/pC)}{pL + R + \frac{1}{pC}} = \frac{K/(LC)}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}},$$

или

$$K_{21}(p) = \frac{H\omega_0^2}{p^2 + \frac{\omega_0}{Q}p + \omega_0^2}, \quad (a)$$

где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  — резонансная частота последовательного колебательного контура;  $Q = \sqrt{L/C}/R$  — добротность контура;  $H = K$  — масштабный множитель. Зная  $K_{21}(p)$ , найдем нормированную АЧХ:

$$\bar{K}_{21}(\bar{\omega}) = K_{21}(\bar{\omega})/|H| = 1/\sqrt{(\bar{\omega}^2 - 1)^2 + \bar{\omega}^2/Q^2},$$

где  $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$  — нормированная частота.

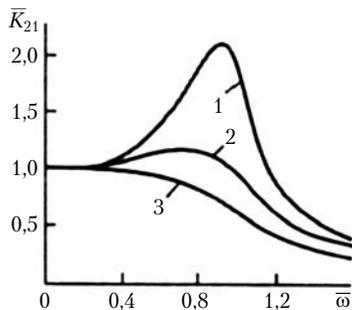


Рис. Т7.94

Графики АЧХ при различных значениях  $Q$  приведены на рис. Т7.94 (кривая 1 соответствует  $Q = 2$ ; кривая 2 —  $Q = 1$ ; кривая 3 —  $Q = 1/\sqrt{2}$ ). Как очевидно из рис. Т7.94, АЧХ рассматриваемой цепи может иметь выброс, высота которого зависит от значения  $Q$ . При малых  $Q$  ( $Q \leq 1$ ) выброс относительно мал или вообще отсутствует.

Цепи с коэффициентом передачи вида (а) и с малыми  $Q$  можно использовать в качестве ФНЧ, а также в составе многосвязного ФНЧ. Цепи, у которых АЧХ имеет большой выброс ( $Q \geq 1$ ), используют только в составе многосвязного ФНЧ. Тогда низкодобротные звенья компенсируют указанный выброс в полосе пропускания, а благодаря наличию высокодобротного звена АЧХ всего фильтра получается с крутым спадом и, следовательно, полоса пропускания резко отделяется от полосы задерживания. Реально значение  $Q$  достигает десятков, а иногда сотен и даже тысяч единиц.

Все рассмотренные в последующих задачах АРС-фильтры нижних частот имеют операторные коэффициенты передачи по напряжению  $K_{21}(p)$ , соответствующие выражению (а). Поэтому оно является математической моделью, а цепь (см. рис. Т7.79) — схемной моделью АРС-фильтров нижних частот 2-го порядка. В справочниках по расчету АРС-фильтров чаще вместо (а) используется обобщающее его соотношение:

$$K_{21}(p) = a_0(p^2 + b_1p + b_0),$$

где  $a_0$ ,  $b_1$ ,  $b_0$  — некоторые вещественные коэффициенты, очевидным образом связанные с  $\omega_0$ ,  $Q$ ,  $H$  в выражении (а); теория фильтров дает возможность найти эти коэффициенты по заданным требованиям к АЧХ фильтра.

**7.100р.** Очевидно, что

$$K_{21}(p) = \frac{KpL}{pL + R + \frac{1}{pC}} = \frac{Kp^2}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}},$$

или

$$K_{21}(p) = \frac{Hp^2}{p^2 + \frac{\omega_0}{Q}p + \omega_0^2}, \quad (6)$$

где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  — резонансная частота последовательного колебательного контура;  $Q = \sqrt{L/C}/R$  — добротность контура,  $H = K$  — масштабный коэффициент.

По  $K_{21}(p)$  найдем нормированную АЧХ:

$$\bar{K}_{21}(\bar{\omega}) = K_{21}(\bar{\omega})/|H| = \bar{\omega}^2/\sqrt{(1 - \bar{\omega}^2)^2 + \bar{\omega}^2/Q^2},$$

где  $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$  — нормированная частота.

Графики АЧХ при различных значениях  $Q$  приведены на рис. Т7.95 (кривая 1 соответствует  $Q = 2$ ; кривая 2 —  $Q = 1$ ; кривая 3 —  $Q = 1/\sqrt{2}$ ). Как очевидно из рис. Т7.95, АЧХ рассматриваемой цепи может иметь выброс, высота которого зависит от значения  $Q$ . При малых  $Q$  выброс относительно мал или вообще отсутствует.

При больших  $Q$  ( $Q \gg 1$ ) выброс велик. Замечания, сделанные в решении задачи 7.99р о применении низко- и высокодобротных цепей, полностью сохраняют свою силу и здесь: высокодобротные звенья обеспечивают крутой спад АЧХ, т.е. высокую избирательность фильтра, а низкодобротные — компенсируют выбросы и тем самым создают относительно постоянное уровня передачи в полосе пропускания.

Все рассмотренные в последующих задачах АРС-фильтры верхних частот имеют операторные коэффициенты передачи по напряжению  $K_{21}(p)$ , соответствующие выражению (6). Поэтому формула (6) и цепь, показанная на рис. Т7.80, для которой она получена, представляют собой модели АРС-фильтров верхних частот 2-го порядка.

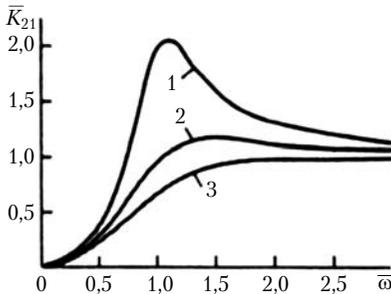


Рис. Т7.95

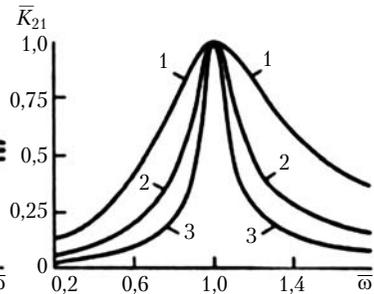


Рис. Т7.96

**7.101р.** Очевидно, что

$$K_{21}(p) = \frac{Kp}{RC \left( p^2 + \frac{1}{RC} p + \frac{1}{LC} \right)},$$

или

$$K_{21}(p) = \frac{H \frac{\omega_0}{Q} p}{p^2 + \frac{\omega_0}{Q} p + \omega_0^2}, \quad (\text{в})$$

где коэффициенты  $\omega_0$ ,  $Q$  и  $H = K$  имеют тот же смысл, что и в задачах 7.99р и 7.100р (см. формулы (а) и (б)).

По  $K_{21}(p)$  найдем нормированную АЧХ:

$$\bar{K}_{21}(\bar{\omega}) = K_{21}(\bar{\omega})/|H| = 1/\sqrt{1 + Q^2(\bar{\omega} - 1/\bar{\omega})^2},$$

где  $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$  — нормированная частота.

Графики АЧХ при различных значениях  $Q$  приведены на рис. Т7.96 (кривая 1 соответствует  $Q = 2$ , кривая 2 —  $Q = 5$ , кривая 3 —  $Q = 10$ ). Характерные точки АЧХ:  $\bar{K}_{21}(0) = \bar{K}_{21}(\infty) = 0$ ;  $K_{21}(1) = 1$ . Асимметричность кривых относительно вертикальной прямой  $\bar{\omega} = 1$  уменьшается с ростом  $Q$ .

Цепь с коэффициентом передачи вида (в) может быть использована в качестве полосового фильтра. АЧХ получается резонансного типа, т.е. с острой верхушкой в окрестностях частоты  $\bar{\omega} = 1$ , т.е.  $\omega = \omega_0$ . Если же требуется АЧХ с уплощенной верхушкой, то применяют каскадное соединение полосовых звеньев 2-го порядка с различными значениями  $\omega_0$  и  $Q$ .

Все рассмотренные в последующих задачах полосовые ARC-фильтры имеют операторные коэффициенты передач по напряжению  $K_{21}(p)$ , соответствующее выражению (в).

**7.108р.** Составим уравнения баланса токов для узлов 3 и 4:

$$\begin{aligned} U_{30}(p)[Y_1(p) + Y_2(p) + Y_3(p) + Y_4(p)] - U_{10}(p)Y_1(p) - \\ - U_{20}(p)Y_2(p) - U_{40}(p)Y_4(p) = 0; \\ U_{40}(p)[Y_4(p) + Y_5(p)] - U_{30}(p)Y_4(p) - U_{20}(p)Y_5(p) = 0. \end{aligned}$$

Операционный усилитель — идеальный, поэтому  $U_{40}(p) = 0$ . Исключив из этих уравнений  $U_{30}(p)$ , найдем

$$\begin{aligned} Y_5(p)[Y_1(p) + Y_2(p) + Y_3(p) + Y_4(p)]U_{20}(p) + Y_2(p)Y_4(p)U_{20}(p) = \\ = -Y_1(p)Y_4(p)U_{10}(p), \end{aligned}$$

откуда с учетом того, что  $U_{10}(p) = U_1(p)$ ,  $U_{20}(p) = U_2(p)$ , следует

$$K_{21}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{-Y_1(p)Y_4(p)}{Y_5(p)[Y_1(p) + Y_2(p) + Y_3(p) + Y_4(p)] + Y_2(p)Y_4(p)}.$$

**7.109м–7.111м.** Используйте результаты решения задачи 7.108р.

# Глава 8

## ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 8.1. Однородная длинная линия при гармоническом внешнем воздействии

**8.1.** Определите волновое сопротивление  $Z_{\text{в}}$ , коэффициент распространения  $\gamma$ , фазовую скорость  $v_{\text{ф}}$  и длину волны  $\lambda$  в линии на частоте  $f = 800$  Гц. Погонные параметры линии:  $R_1 = 11,4$  Ом/км;  $L_1 = 0,6 \cdot 10^{-3}$  Гн/км;  $C_1 = 38 \cdot 10^{-9}$  Ф/км;  $G_1 = 0,8 \cdot 10^{-6}$  См/км.

**8.2м.** Считая известными погонные параметры линии, получите выражения для коэффициента ослабления  $\alpha$  и коэффициента фазы  $\beta$ . Упростите найденные выражения для линии с малыми потерями ( $\omega L_1 \gg R_1$ ,  $\omega C_1 \gg G_1$ ).

**8.3р.** Определите напряжение  $u(l, t)$  на выходе линии, рассмотренной в задаче 8.1, если к ее входу приложено напряжение  $u(0, t) = \sqrt{2} \cdot 500 \cos(2\pi 800t)$  В. Линия нагружена на элемент, сопротивление которого равно волновому; длина линии  $l = 100$  км.

**8.4.** Однородная линия передачи без потерь ( $L_1 = 2 \cdot 10^{-3}$  Гн/км;  $C_1 = 5 \cdot 10^{-9}$  Ф/км) нагружена на резистор, сопротивление которого  $R_{\text{н}} = 500$  Ом. Определите коэффициент отражения по напряжению  $\rho_2$  в конце линии и коэффициент бегущей волны  $K_6$ .

**8.5.** К выходу однородной линии передачи ( $R_1 = 6,5$  Ом/км;  $L_1 = 2,29 \cdot 10^{-3}$  Гн/км;  $C_1 = 5,22 \cdot 10^{-9}$  Ф/км;  $G_1 = 0,5 \cdot 10^{-6}$  См/км) подключена нагрузка в виде последовательно соединенных конденсатора емкостью  $C = 1$  мкФ и резистора с сопротивлением  $R = 500$  Ом. Найдите коэффициент отражения по напряжению  $\rho_2$  в конце линии и коэффициент бегущей волны  $K_6$  на частоте 1 кГц.

**8.6р.** Выведите формулы, определяющие законы распределения комплексных действующих значений напряжения

$\dot{U}(x)$  и тока  $\dot{I}(x)$  линии по заданным комплексному действующему значению напряжения на входе линии  $\dot{U}(0)$  и комплексному сопротивлению нагрузки  $Z_{\text{н}}$ . Длину линии  $l$  и ее волновые параметры  $Z_{\text{в}}$ ,  $\gamma$  считайте известными.

**8.7.** Решите задачу 8.6р, считая известными комплексные действующие значения напряжения на входе  $\dot{U}(0)$  и выходе  $\dot{U}(l)$  линии.

**8.8м.** Линия без потерь длиной  $l = 15$  м нагружена на элемент  $R_{\text{н}} = 100$  Ом. Погонные параметры линии:  $L_1 = 0,42$  мкГн/м;  $C_1 = 75$  пФ/м. Частота внешнего гармонического воздействия  $f = 100$  МГц. Определите распределение действующих значений напряжения  $U(x)$  и тока  $I(x)$  вдоль линии, принимая действующее значение напряжения на входе линии  $U(0) = 1$  В.

**8.9р.** Найдите волновое сопротивление  $R_{\text{в}}$  и фазовую скорость  $v_{\text{ф}}$  линии без потерь, если в конце линии, нагруженной на  $R_{\text{н}} = 200$  Ом, наблюдается максимум действующего значения напряжения ( $U_{\text{max}} = 1,5$  В), а ближайший минимум напряжения ( $U_{\text{min}} = 0,9$  В) расположен на расстоянии  $a = 0,75$  м от ее конца. Частота внешнего гармонического воздействия  $f = 100$  МГц.

**8.10м.** Действующее значение напряжения на выходе разомкнутой линии без потерь  $U(l) = 6,4$  В; при подключении нагрузки  $R = 100$  Ом оно уменьшается до 1,33 В. В обоих случаях действующее значение напряжения на входе линии составляет 1 В, а частота его сохраняется неизменной. Рассчитайте волновое сопротивление  $R_{\text{в}}$  линии.

**8.11р.** Однородная длинная линия без потерь нагружена на элемент  $C_{\text{н}} = 20$  пФ. Волновое сопротивление линии  $R_{\text{в}} = 100$  Ом, длина волны  $\lambda = 3$  м, фазовая скорость падающей волны в линии  $v_{\text{ф}} = 3 \cdot 10^8$  м/с. На каком расстоянии от конца линии находится ближайший узел напряжения?

**8.12.** Нагрузкой линии без потерь является индуктивный элемент  $L_{\text{н}} = 0,5$  мкГн. Волновое сопротивление линии  $R_{\text{в}} = 100$  Ом, длина волны  $\lambda = 3$  м, фазовая скорость в линии  $v_{\text{ф}} = 3 \cdot 10^8$  м/с. На каком расстоянии  $a$  от конца линии находится ближайший узел напряжения?

**8.13.** Ближайший узел напряжения расположен на расстоянии  $a = 0,6$  м от конца линии без потерь, нагруженной на реактивное сопротивление  $Z_{\text{н}} = jx_{\text{н}}$ . Определите значение и знак сопротивления  $x_{\text{н}}$  для  $R_{\text{в}}$ ,  $\lambda$ ,  $v_{\text{ф}}$ , приведенных в условии задачи 8.12.

## Решения и методические указания

**8.2м.** Из соотношения  $\gamma^2 = (R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1) = (\alpha + j\beta)^2$  получите систему двух уравнений  $\alpha^2 - \beta^2 = R_1 G_1 - \omega^2 L_1 C_1$ ,  $2\alpha\beta = \omega(L_1 G_1 + R_1 C_1)$ , решая которую найдите  $\alpha$  и  $\beta$ . Упростите полученные выражения для линии с малыми потерями с помощью приближенного равенства  $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$  при  $x \ll 1$ .

**8.3р.** При  $Z_{\text{н}} = Z_{\text{в}}$  в линии устанавливается режим бегущих волн, при этом комплексное действующее значение напряжения в произвольной точке линии  $\dot{U}(x)$  может быть выражено через комплексное действующее значение напряжения на входе линии  $\dot{U}(0)$ :

$$\dot{U}(x) = \dot{U}(0)e^{-\gamma x}.$$

Коэффициент распространения

$$\gamma = 1/\sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} = (29 + j37,6) \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1}.$$

Следовательно,  $\dot{U}(l) = 500e^{-(2,9+j3,76)l} = 27,5e^{-j215^\circ}$  В. Мгновенное значение напряжения на выходе линии  $u(l, t) = \sqrt{2} \cdot 27,5 \cos(2\pi 800t - 215^\circ)$  В.

**8.6р.** Решения дифференциальных уравнений однородной длинной линии имеют вид

$$\dot{U}(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}; \quad \dot{I}(x) = \frac{1}{Z_{\text{в}}} A_1 e^{-\gamma x} - \frac{1}{Z_{\text{в}}} A_2 e^{\gamma x}.$$

Используя заданные значения  $\dot{U}(0) = \dot{U}(x)|_{x=0}$  и  $Z_{\text{н}} = \dot{U}(x)/\dot{I}(x)|_{x=l} = \dot{U}(l)/\dot{I}(l)$ , составим уравнения для определения постоянных интегрирования:  $A_1 + A_2 = \dot{U}(0)$ ,  $A_2 = -A_1 e^{-2\gamma l} (m - 1)(m + 1)$ , где  $m = Z_{\text{в}}/Z_{\text{н}}$ , откуда

$$A_1 = \dot{U}(0) \left[ 1 - \frac{m-1}{m+1} e^{-2\gamma l} \right]^{-1};$$

$$A_2 = -\dot{U}(0) \frac{m-1}{m+1} e^{-2\gamma l} \left[ 1 - \frac{m-1}{m+1} e^{-2\gamma l} \right]^{-1}.$$

Подставив полученные значения  $A_1$  и  $A_2$  в выражения для  $\dot{U}(x)$  и  $\dot{I}(x)$ , найдем

$$\dot{U}(x) = \dot{U}(0) [\text{ch } \gamma(l-x) + m \text{sh } \gamma(l-x)] (\text{ch } \gamma l + m \text{sh } \gamma l)^{-1};$$

$$\dot{I}(x) = \dot{U}(0) Z_{\text{в}}^{-1} [m \text{ch } \gamma(l-x) + \text{sh } \gamma(l-x)] (\text{ch } \gamma l + m \text{sh } \gamma l)^{-1}.$$

В ряде случаев удобно определять законы распределения  $\dot{U}(x)$ ,  $\dot{I}(x)$ , считая известными  $\dot{U}(l)$  и  $Z_{\text{н}}$ . Так как  $\dot{U}_l = \dot{U}(0) (\text{ch } \gamma l + m \text{sh } \gamma l)^{-1}$ , то

$$\begin{aligned}\dot{U}(x) &= \dot{U}(l)(\operatorname{ch} \gamma x' + m \operatorname{sh} \gamma x'); \\ \dot{I}(x) &= \dot{U}(l)Z_B^{-1}(m \operatorname{ch} \gamma x + \operatorname{sh} \gamma x)^{-1},\end{aligned}$$

где  $x' = l - x$  — координата, отсчитываемая от конца линии.

**8.8м.** См. решение задачи 8.6р.

**8.9р.** Для линии без потерь, нагруженной на элемент  $R_H$ ,  $\gamma = j\beta$ , а  $m = R_B/R_H$  — вещественное число. На основании результатов решения задачи 8.6р запишем

$$U(l - y) = U(l)\sqrt{\cos^2 \beta y + (m \sin \beta y)^2},$$

где  $y = l - x$ .

При  $m < 1$ , т.е. при  $R_H > R_B$ , максимальное значение функции  $U(y)$   $U_{\max} = U(l)$ , а минимальное —  $U_{\min} = mU_{\max}$ , причем соседние максимумы и минимумы расположены на расстоянии  $a = \pi/(2\beta) = \lambda/4$  друг от друга. Следовательно,  $v_\phi = \lambda f = 4af = 3 \cdot 10^8$  м/с и  $R_B = R_H U_{\min}/U_{\max} = 120$  Ом. Отметим, что при  $m > 1$ , т.е. при  $R_H < R_B$ ,  $U_{\min} = U(l)$ ;  $U_{\max} = mU_{\min}$ .

**8.10м.** Проанализируйте выражение

$$U(0) = U(l)\sqrt{\cos^2 \beta l + (m \sin \beta l)^2},$$

(см. решение задачи 8.9р) для двух случаев: а)  $m = 0$  ( $R_H = \infty$ ); б)  $m = R_B/R_H$ . По известным значениям  $U(0)$  и  $U(l)$  найдите  $\cos^2 \beta l$ ,  $m$ , а затем  $R_B$ .

**8.11р.** Распределение напряжения вдоль линии можно описать следующим выражением (см. задачу 8.6р):

$$\dot{U}(l - y) = \dot{U}(l)(\operatorname{ch} \gamma y + m \operatorname{sh} \gamma y)^{-1}; \quad y = l - x = x'.$$

По условию задачи,  $\gamma = j\beta$ ,  $m = R_B/R_H = j\omega C_H R_B$ . Следовательно,  $U(l - y) = U(l)(\cos \beta y - \omega C_H R_B \sin \beta y)$ . Отсюда получим уравнение  $\operatorname{tg} \beta y = 1/(\omega C_H R_B)$ , решение которого позволяет определить координаты узлов напряжения

$$y_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega C_H R_B},$$

где  $\beta = 2\pi/\lambda$ . Частоту колебаний в линии определим по заданным  $v_\phi$  и  $\lambda$ :  $f = v_\phi/\lambda = 100$  МГц. Тогда  $\operatorname{arctg} \frac{1}{\omega C_H R_B} = \operatorname{arctg} 0,796 = (0,672 + \pi n)$  рад, где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Таким образом,  $y_0 = (0,672 + \pi n) = (0,32 + 1,5n)$  м. Ближайший узел напряжения расположен на расстоянии  $a = 0,32$  м от конца линии. Этот результат может быть получен и иным методом (см. задачу 8.18р).

## 8.2. Частотные характеристики однородных длинных линий

**8.14м.** Заданы характеристические параметры линии  $Z_{\text{в}}$ ,  $\gamma$  и ее длина  $l$ .

Найдите  $Z$ -параметры четырехполюсника, эквивалентного этой линии.

**8.15м.** К отрезку линии длиной  $l$ , характеристические параметры которой  $Z_{\text{в}}$  и  $\gamma$  известны, подключены нагрузка  $Z_{\text{н}2}$  и источник, ЭДС и внутреннее сопротивление которого  $\dot{E}$  и  $Z_{\text{н}1}$  (рис. Т8.1). Определите рабочий коэффициент передачи линии  $K_{\text{р}}(j\omega) = U_2/\dot{E}$ .

**8.16р.** Найдите частоты, на которых выполняются условия резонанса токов и резонанса напряжений для короткозамкнутого отрезка коаксиального кабеля длиной  $l = 1$  м с погонными параметрами  $L_1 = 2,63 \cdot 10^{-4}$  Гн/км;  $C_1 = 46,5 \cdot 10^{-9}$  Ф/км. Определите входное сопротивление кабеля на частоте 100 МГц.

**8.17р.** Рассчитайте наименьшую длину разомкнутого отрезка кабеля ( $L_1 = 2,63 \cdot 10^{-4}$  Гн/км;  $C_1 = 46,5 \cdot 10^{-9}$  Ф/км), входное сопротивление которого на частоте 100 МГц эквивалентно емкости 100 пФ.

**8.18р.** Решите задачу 8.11р, заменив емкость нагрузки  $C_{\text{н}}$  эквивалентным ей разомкнутым отрезком линии минимальной длины. Значения  $R_{\text{в}}$ ,  $\lambda$ , и  $v_{\text{ф}}$  для этого отрезка приведены в условии задачи 8.11р.

**8.19.** Найдите наименьшую длину короткозамкнутого отрезка кабеля ( $L_1 = 2,63 \cdot 10^{-4}$  Гн/км;  $C_1 = 46,5 \cdot 10^{-9}$  Ф/км), входное сопротивление которого на частоте 100 МГц эквивалентно индуктивности 0,6 мкГн.

**8.20.** По данным задачи 8.19 определите наименьшую длину разомкнутого отрезка кабеля.

**8.21.** Отрезок коаксиального кабеля длиной  $l = 0,4$  м, погонные параметры которого приведены в условии задачи 8.19, нагружен на сопротивление  $Z_{\text{н}}$ . На частоте  $f = 100$  МГц

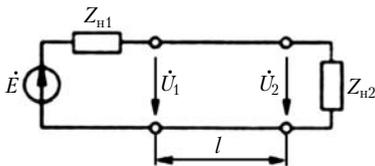


Рис. Т8.1

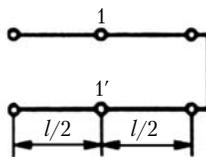


Рис. Т8.2

входное сопротивление кабеля равно нулю. Определите сопротивление  $Z_{\text{в}}$ .

**8.22.** Решите задачу 8.21, принимая входное сопротивление кабеля бесконечно большим.

**8.23.** Входное сопротивление короткозамкнутого отрезка линии без потерь в точках 1 — 1' равно нулю (рис. Т8.2). Найдите минимальную длину  $l$  этого отрезка.

**8.24.** Решите задачу 8.23, принимая входное сопротивление в точках 1 — 1' бесконечно большим.

**8.25м.** На вход длинной линии подается бигармоническое напряжение  $u(0, t) = U_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos 2\omega_1 t$ . Предложите способы выделения на нагрузке линии напряжения: а) только с частотой  $\omega_1$ ; б) только с частотой  $2\omega_1$ .

**8.26р.** Входные сопротивления воздушной линии передачи длиной  $l = 100$  км в режимах холостого хода и короткого замыкания на выходе, измеренные на частоте  $\omega = 10^4$  рад/с, составляют  $Z_{\text{х}} = 1064e^{-j0,66}$  Ом,  $Z_{\text{к}} = 323e^{-j0,43}$  Ом. Найдите погонные и волновые параметры линии.

**8.27.** Определите входное сопротивление цепи, образованной соединением трех отрезков длинных линий без потерь (рис. Т8.3) на частоте  $f = 150$  МГц. Параметры цепи:  $R_{\text{в}1} = 50$  Ом;  $l_1 = 4$  м;  $R_{\text{в}2} = 75$  Ом;  $l_2 = 2$  м;  $R_2 = 200$  Ом;  $R_{\text{в}3} = 100$  Ом;  $l_3 = 3,75$  м;  $R_3 = 150$  Ом. Фазовая скорость во всех трех линиях  $v_{\text{ф}} = 3 \cdot 10^8$  м/с.

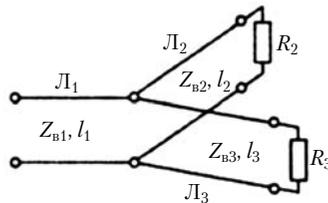


Рис. Т8.3

**8.28м.** Передачу энергии от источника к двум размещенным в разных местах нагрузкам осуществляют с помощью трех линий без потерь, соединенных между собой согласно рис. Т8.3. Волновые сопротивления линий известны:  $R_{\text{в}1} = 50$  Ом;  $R_{\text{в}2} = 100$  Ом;  $R_{\text{в}3} = 75$  Ом. Коэффициент бегущей волны в линии  $L_2$   $K_{62} = 0,8$ . Частота входного воздействия  $f = 100$  МГц, фазовая скорость во всех трех линиях  $v_{\text{ф}} = 3 \cdot 10^8$  м/с;  $l_2 = 7,5$  м;  $l_3 = 9,75$  м. Найдите значение сопротивления  $R_3$ , при котором в линии  $L_1$  имеет место режим бегущей волны, а также определите коэффициент бегущей волны  $K_{63}$  в линии  $L_3$ . Имеет ли задача единственное решение?

**8.29м.** Постройте Т-образную схему замещения линии без потерь, погонные параметры которой  $L_1 = 2$  мГн/км;  $C_1 = 6 \cdot 10^{-9}$  Ф/км; длина линии  $l = 100$  км. Частота входного воздействия  $f = 1$  кГц.

**8.30м.** Измерения входного сопротивления линии в режимах холостого хода и короткого замыкания на выходе, проведенные в режиме постоянного тока, дали следующие результаты:  $R_x = 12,9$  кОм;  $R_k = 1,11$  кОм. Длина линии  $l = 100$  км. Постройте П-образную схему замещения линии в режиме постоянного тока.

**8.31р.** Четвертьволновый отрезок линии длиной  $l$  закорочен на конце. Погонные параметры линии  $R_1, L_1, C_1, G_1$  известны. Принимая  $\omega L_1 \gg R_1, G_1 = 0$ , найдите резонансную частоту  $\omega_0$ , резонансное сопротивление  $R_0$  и добротность  $Q$  параллельного колебательного контура, эквивалентного этому отрезку линии.

**8.32.** Четвертьволновый отрезок коаксиального кабеля длиной  $l = 0,2$  м закорочен на конце. Погонные параметры кабеля:  $R_1 = 1,7$  Ом/м;  $L_1 = 0,42$  мкГн/м;  $C_1 = 75$  пФ/м;  $G_1 = 0$ . Определите резонансную частоту  $f$ , резонансное сопротивление  $R_0$  и добротность  $Q$  параллельного контура, эквивалентного этому отрезку кабеля. Резонансная частота контура должна соответствовать наименьшей резонансной частоте заданного отрезка кабеля.

**8.33м.** Найдите резонансную частоту  $\omega_0$ , резонансное сопротивление  $R_0$  и добротность  $Q$  последовательного колебательного контура, эквивалентного разомкнутому четвертьволновому отрезку линии длиной  $l$ . Погонные параметры линии  $R_1, L_1, C_1, G_1$  заданы; примите  $\omega L_1 \gg R_1, G_1 = 0$ .

**8.34.** Четвертьволновый отрезок коаксиального кабеля длиной  $l = 0,2$  м, разомкнутый на конце, имеет погонные параметры, приведенные в условии задачи 8.32. Рассчитайте резонансную частоту  $f_0$ , резонансное сопротивление  $R_0$  и добротность последовательного колебательного контура, эквивалентного заданному отрезку кабеля. Резонансная частота контура должна соответствовать наименьшей резонансной частоте отрезка кабеля.

**8.35.** Вычислите волновое сопротивление  $R_{вт}$  четвертьволнового трансформатора, используемого для согласования однородной линии с волновым сопротивлением  $R_{в} = 100$  Ом и сопротивления нагрузки  $R_{н} = 50$  Ом.

**8.36р.** Линия без потерь с волновым сопротивлением  $R_{в} = 200$  Ом нагружена на резистор сопротивлением  $R_{н} = 100$  Ом. Длина волны в линии  $\lambda = 3$  м. На каком расстоянии  $l_1$  от конца линии следует подключить шлейф (короткозамкнутый отрезок линии) с волновым сопротивлением

$R_{\text{вх}} = 200$  Ом, чтобы добиться согласования линии с нагрузкой? Найдите длину шлейфа  $l_2$ . Размеры  $l_1$  и  $l_2$  должны быть минимально возможными. Имеет ли задача единственное решение?

### Решения и методические указания

**8.14м.**  $Z$ -параметры четырехполюсника можно рассчитать по известным  $A$ -параметрам ( $A_{11} = A_{22} = \text{ch } \gamma l$ ;  $A_{12} = Z_{\text{в}} \text{sh } \gamma l$ ;  $A_{21} = Z_{\text{в}}^{-1} \text{sh } \gamma l$ ) с помощью формул перехода от  $A$  к  $Z$ -параметрам.

**8.15м.** Используйте результаты решения задач 7.64р, 8.14м.

**8.16р.** Входное сопротивление короткозамкнутого отрезка длиной линии без потерь  $Z_{\text{к}} = jR_{\text{в}} \text{tg } \beta l$ .

Следовательно,  $Z_{\text{к}} = 0$  (выполняется условие резонанса напряжений) на частотах  $f_{0\text{н}}$ , определяемых из условия  $2\pi f_{0\text{н}} \sqrt{L_1 C_1} = 2m \frac{\pi}{2}$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots$

Входное сопротивление линии обращается в бесконечность (выполняется условие резонанса токов) на частотах  $f_{0\text{т}}$ , удовлетворяющих условию  $2\pi f_{0\text{т}} \sqrt{L_1 C_1} l = 2(m + 1) \frac{\pi}{2}$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$

Используя эти соотношения, найдем резонансные частоты линии:

$$f_{0\text{н}} = 143m \text{ МГц } (m = 1, 2, 3, \dots);$$

$$f_{0\text{т}} = 71,5(2m + 1) \text{ МГц } (m = 0, 1, 2, \dots).$$

На частоте 100 МГц входное сопротивление линии будет иметь емкостный характер:

$$Z_{\text{к}}|_{f=100 \text{ МГц}} = j\sqrt{L_1 C_1} \text{tg}(2\pi \cdot 10^8 \sqrt{L_1 C_1}) = -j104 \text{ Ом}.$$

**8.17р.** Комплексное входное сопротивление емкости  $C = 100$  пФ на частоте 100 МГц  $Z_C = -j/(2\pi f C) = -j15,9$  Ом. Длина  $l$  разомкнутого отрезка длиной линии, входное сопротивление которого на частоте 100 МГц эквивалентно емкости 100 пФ, может быть найдена из соотношения  $Z_C = -j15,9 = -jR_{\text{в}} \text{ctg } 2\pi \frac{l}{\lambda}$ . Определив волновое сопротивление линии  $R_{\text{в}} = \sqrt{L_1 C_1} = 75,2$  Ом и длину волны в линии  $\lambda = (f\sqrt{L_1 C_1})^{-1} = 2,86$  м, найдем

$$l = \frac{\lambda}{2\pi} \text{arctg}|x_C/R_{\text{в}}| = 0,455(1,36 + m) \text{ м } (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Минимальная длина:  $l_{\min} = 0,455 \cdot 1,36 = 0,62$  м.

**8.18р.** Минимальная длина разомкнутого отрезка линии, входное сопротивление которого на частоте  $f = v_{\text{ф}}/\lambda = 100$  МГц эквивалентно емкости  $20$  пФ,  $l_{\min} = 0,43$  м (см. задачу 8.17р). Мысленно присоединим этот разомкнутый отрезок к рассматриваемой линии. Полученная воображаемая линия работает в режиме холостого хода на выходе, и ближайший узел напряжения располагается на расстоянии  $\lambda/4 = 0,75$  м от ее конца, т.е. на расстоянии  $a = \lambda/4 - l_{\min} = 0,32$  м от конца линии. Это совпадает с результатом, полученным при решении задачи 8.11р.

Аналогичным методом можно решить задачу 8.12, заменив катушку индуктивности  $L_n$  эквивалентным ей короткозамкнутым отрезком линии и учтя, что в короткозамкнутой линии узлы напряжения расположены на расстоянии  $\lambda/2$  друг от друга, считая от конца линии.

**8.25м.** Рассмотрите зависимость входного сопротивления отрезка длинной линии от электрической длины  $l/\lambda$ , частоты приложенного напряжения и условий на выходе (короткое замыкание или холостой ход). Выбрав, надлежащим образом, параметры этого отрезка, следует подключить его параллельно входу линии. Учтите, что колебания, подлежащие разделению, отличаются по частоте ровно в 2 раза.

**8.26р.** Выпишем соотношения, устанавливающие связь между входными сопротивлениями разомкнутой и короткозамкнутой линий и их характеристическими параметрами:  $Z_x = Z_B \text{cth } \gamma l$ ,  $Z_k = Z_B \text{th } \gamma l$ .

Характеристические параметры можно выразить через погонные параметры линии

$$\gamma = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)}; \quad Z_B = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}}.$$

Следовательно,  $Z_B = \sqrt{Z_x Z_k} = 586,24e^{-j0,115} = (582,36 - j67,27)$  Ом;  $\text{th } \gamma l = \sqrt{Z_x Z_k^{-1}} = 0,55e^{-j0,545} = 0,47 + j0,286$ ;  $\gamma Z_B = R_1 + j\omega L_1$ ;  $\gamma/Z_B = G_1 + j\omega C_1$ .

Для определения коэффициента распространения  $\gamma$  воспользуемся легко проверяемым соотношением  $e^{2\gamma l} = (1 + \text{th } \gamma l) \times (1 - \text{th } \gamma l)^{-1}$ , откуда  $e^{2\gamma l} = 2,493e^{j(-5,595 + 2\pi n)}$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  Учтя, что  $\gamma = \alpha + j\beta$ , найдем  $\alpha = \frac{1}{2l} \ln 2,493 = 4,57 \cdot 10^{-3}$  Нп/км;  $\beta = (2l)^{-1}(-5,595 + 2\pi n) = (-27,975 \cdot 10^{-3} + 0,01\pi n)$  рад/км.

Коэффициент фазы  $\alpha$  в отличие от коэффициента ослабления  $\beta$  определяется неоднозначно. Для устранения этой неоднозначности необходимо знать хотя бы приближенное значение фазовой скорости в линии. В задаче рассматривается линия передачи, оба провода которой расположены в воздухе, следовательно, фазовая скорость в ней приблизительно равна скорости распространения электромагнитных колебаний в свободном пространстве, т.е.  $3 \cdot 10^5$  км/с. Заметим, что если бы в задаче рассматривалась кабельная линия, то нужно было бы знать (приближенно) относительную диэлектрическую проницаемость изоляции кабеля  $\epsilon_r$ ; в этом случае  $v_\phi \approx 3 \cdot 10^5 / \sqrt{\epsilon_r}$ , км/с.

При  $v_\phi \approx 3 \cdot 10^5$  км/с  $\beta = \omega / v_\phi = 33 \cdot 10^{-3}$  рад/км. Приняв в формуле для коэффициента  $\beta n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , получим  $\beta = (-27,96; 3,44; 34,86; 66,27; \dots) \cdot 10^{-3}$  рад/км. Наиболее близким к найденному приближенному значению  $\beta = 33 \cdot 10^{-3}$  рад/км оказывается  $\beta = 34,86 \cdot 10^{-3}$  рад/км, которое и принимаем в качестве точного значения. Таким образом,  $\gamma = \alpha + j\beta = (4,57 + j34,86) \cdot 10^{-3} = 35,15e^{j1,441} \cdot 10^{-3}$  км<sup>-1</sup>. Определим погонные параметры линии:

$$\gamma Z_B = R_1 + j\omega L_1 = 20,61e^{j1,326} = (5 + j20) \text{ Ом/км};$$

$$\gamma Z_B^{-1} = G_1 + j\omega C_1 = 59,96 \cdot 10^{-6} e^{j1,556} = (0,89 + j59,95) \cdot 10^{-6} \text{ См/км},$$

откуда  $R_1 = 5$  Ом/км;  $L_1 = 2$  мГн/км;  $G_1 = 0,89 \cdot 10^{-6}$  См/км;  $C_1 = 6 \cdot 10^{-9}$  Ф/км.

**8.28м.** Учтите, что коэффициент бегущей волны  $K_{62}$  в линии  $L_2$  принимает заданное значение 0,8 при двух различных сопротивлениях нагрузки  $R_2$ : а)  $R_2 = K_{62} R_{B2} = 80$  Ом; б)  $R_2 = K_{62}^{-1} R_{B2} = 125$  Ом. Им соответствуют и два различных значения входного сопротивления линии  $L_2$ , которые наряду с входным сопротивлением  $L_3$  определяют нагрузку и режим работы линии  $L_1$ . Следовательно, задача имеет два решения.

**8.29м.** Найдите  $Z$ -параметры четырехполюсника, эквивалентного рассматриваемой линии, и по ним рассчитайте параметры элементов  $T$ -образной схемы замещения четырехполюсника.

**8.30м.** С помощью формулы для входного сопротивления четырехполюсника (см. ответ к задаче 7.60) выразите  $R_k$  и  $R_x$  через  $Y$ -параметры. Учтывая, что последние являются вещественными, а четырехполюсник — симметричным, покажите, что

$$Y_{11} = \frac{1}{R_k}; \quad Y_{12} = - \left[ \frac{1}{R_k} \left( \frac{1}{R_k} - \frac{1}{R_x} \right) \right]^{1/2}.$$

По  $Y$ -параметрам рассчитайте параметры элементов П-образной схемы замещения.

**8.31р.** Входное сопротивление короткозамкнутого отрезка линии длиной  $l$   $Z_k = Z_b \operatorname{th} \gamma l$ . Учитывая, что  $\gamma = \alpha + j\beta$ , и преобразовывая гиперболические функции комплексного аргумента, получим

$$Z_k = Z_b \frac{\operatorname{sh}(\alpha l + j\beta l)}{\operatorname{ch}(\alpha l + j\beta l)} = Z_b \frac{\operatorname{sh} \alpha l \cos \beta l + j \operatorname{ch} \alpha l \sin \beta l}{\operatorname{ch} \alpha l \cos \beta l + j \operatorname{sh} \alpha l \sin \beta l}.$$

Для линии с малыми потерями ( $\omega L_1 \gg R_1$ ,  $G = 0$ ) можно записать  $Z_b \approx \sqrt{L_1 C_1}$ ,  $\alpha \approx 0,5 R_1 \sqrt{L_1 C_1}$  (см. задачу 8.2м).

Входное сопротивление параллельного колебательного контура с малыми потерями при небольшой расстройке может быть записано в виде  $Z(j\omega) = R_0 / (1 + j\xi) \approx R_0 / (1 + j2Q\delta)$ , где  $\delta = \Delta\omega / \omega_0 = (\omega - \omega_0) / \omega_0$ . Преобразуем входное сопротивление рассматриваемой линии к такому виду.

Как известно, входное сопротивление короткозамкнутого четвертьволнового отрезка линии без потерь бесконечно велико. В линии имеет место резонанс токов. В этом режиме длина волны в линии и коэффициент фазы принимают некоторые значения  $\lambda_0$  и  $\beta_0$ . Поскольку  $\beta_0 l = \pi/2$ ;  $\beta_0 = \omega_0 / v_\phi = \omega_0 \sqrt{L_1 C_1}$ , резонанс токов наступает на частоте  $\omega_0 = \pi(2l\sqrt{L_1 C_1})^{-1}$ . (Здесь и далее имеют в виду первый по счету резонанс токов.)

При наличии потерь в линии входное сопротивление рассматриваемого отрезка уже не равно бесконечности, хотя и может достигать очень больших значений. Сопротивление  $Z_k(\omega_0)$  определим по приведенной формуле, приняв  $\cos \beta_0 l = 0$ ;  $\sin \beta_0 l = 1$  и считая, что при малых потерях  $\alpha l \ll 1$ ,  $\operatorname{ch} \alpha l \approx 1$  и  $\operatorname{sh} \alpha l \approx \alpha l$ :

$$Z_k(\omega_0) = R_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \frac{1}{C_1} = \frac{2L_1}{R_1 C_1 l}.$$

Рассмотрим зависимость  $Z_k(\omega)$ , ограничиваясь случаем малых расстроек ( $\omega \approx \omega_0$ ). Так как  $\beta = \omega / v_\phi$ , то  $\beta / \beta_0 = \omega / \omega_0$ ;  $\beta l = \beta_0 l \omega / \omega_0 = \pi \omega / (2\omega_0)$ . Введем относительную расстройку  $\delta = (\omega - \omega_0) / \omega_0$ . Тогда  $\beta l = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \delta$ . С учетом того, что  $\delta \ll 1$ , запишем

$$\cos \beta l = -\sin \frac{\pi \delta}{2} \approx -\frac{\pi \delta}{2}; \quad \sin \beta l = \cos \frac{\pi \delta}{2} \approx 1.$$

Приближенное выражение для  $Z_k$  примет вид

$$Z_k \approx \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \left[ -\alpha l \frac{\pi \delta}{2} + j1 \right] \left[ -\frac{\pi \delta}{2} + j\alpha l \right]^{-1}.$$

Отбросив первый член в числителе ввиду его малости, получим

$$Z_k = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \left[ \alpha l + j \frac{\pi \delta}{2} \right]^{-1} = R_0 \left[ 1 + j \frac{\pi \delta}{2\alpha l} \right]^{-1}.$$

Сравнивая  $Z_k$  с  $Z(j\omega)$  для параллельного колебательного контура, эквивалентного рассматриваемому отрезку линии, найдем

$$\omega_0 = \pi / (2l \sqrt{L_1 C_1}); \quad R_0 = \sqrt{L_1 / C_1} / (\alpha l) = 2L_1 / (C_1 R_1 l);$$

$$Q = \pi / (4\alpha l) = \frac{\pi \delta}{2R_1 l} \sqrt{L_1 / C_1}.$$

**8.33м.** Эта задача решается аналогично задаче 8.31р. Исходной является формула для входного сопротивления разомкнутого отрезка линии  $Z_x = Z_b \operatorname{cth} \gamma l$ . Входное сопротивление последовательного контура при малых расстройках  $Z(j\omega) \approx R_0(1 + j2Q\delta)$ ,  $\delta = (\omega - \omega_0) / \omega_0$ . Преобразуйте  $Z_k$  к виду  $Z(j\omega)$ .

**8.36р.** Расстояние  $l_1$  нужно выбрать так, чтобы входная проводимость отрезка линии длиной  $l_1$ , нагруженного на сопротивление  $R_n$ , равнялась бы  $R_b^{-1} + jb$ , т.е.

$$Y_{\text{вх}} = (R_b + jR_n \operatorname{tg} \beta l_1) [R_b(R_n + jR_b \operatorname{tg} \beta l_1)]^{-1} = \frac{1}{R_b} + jb.$$

Следовательно,

$$l_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \left[ \pm \sqrt{\frac{R_n}{R_b}} \right]; \quad b = \pm \sqrt{\frac{R_n}{R_b}} \frac{R_n - R_b}{R_b^2}.$$

Входная проводимость шлейфа должна скомпенсировать составляющую  $jb$  проводимости  $Y_{\text{вх}}$ ;  $Y_k = -j \frac{1}{R_{\text{вн}}} \operatorname{ctg} \beta l_2 = -jb$ , откуда

$$l_2 = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \left[ \pm \sqrt{R_n R_b} \frac{R_b}{R_{\text{вн}}(R_n - R_b)} \right].$$

Если размеры  $l_1$  и  $l_2$  выбрать в соответствии с полученными формулами, то  $Y_{\text{вх}} + Y_k = R_b^{-1}$ , и в основной линии, вплоть до места подключения шлейфа, будет существовать режим бегущей волны.

При вычислениях  $l_1, l_2, b$  следует брать во всех формулах знак или «плюс», или «минус» перед радикалами. Задача имеет два решения:

$$1) l_1 = 0,294 \text{ м}; l_2 = 1,04 \text{ м}; b = -3,54 \cdot 10^{-3} \text{ См};$$

$$2) l_1 = 1,21 \text{ м}; l_2 = 0,456 \text{ м}; b = 3,54 \cdot 10^{-3} \text{ См}.$$

### 8.3. Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами

**8.37.** На вход линии поступает прямоугольный импульс напряжения. Погонные параметры линии приведены в условии задачи 8.1. Какую дополнительную индуктивность  $L_{\text{доп}}$  на каждый километр длины следует включить в линию, чтобы форма импульса не изменилась в результате прохождения импульса по линии? Определите характеристические параметры  $Z_{\text{в}}$  и  $\gamma$ , фазовую скорость  $v_{\text{ф}}$  и длину волны  $\lambda$  в линии на частоте  $f = 800$  Гц до и после включения дополнительных индуктивных элементов. Какие изменения в линии вызвало включение  $L_{\text{доп}}$ ?

**8.38м.** В линии выполняются условия неискаженной передачи сигналов ( $L_1/R_1 = C_1/G_1$ ). Покажите, что коэффициент ослабления  $\alpha$  в этом случае принимает минимально возможное при заданных  $R_1$  и  $G_1$  значение.

**8.39.** На вход однородной линии длиной  $l = 100$  м, согласованной с нагрузкой, поступает прямоугольный импульс напряжения. Погонные параметры линии:  $L_1 = 0,42$  мкГн/м;  $C_1 = 75$  пФ/м. Через какое время  $t_0$  импульс появится на выходе линии?

**8.40м.** Длинная линия включена между источником энергии и нагрузкой (см. рис. Т8.1). Источник энергии характеризуется операторным внутренним сопротивлением  $Z_{\text{н1}}(p)$  и ЭДС  $E(p)$ , а нагрузка — операторным сопротивлением  $Z_{\text{н2}}(p)$ . Операторное волновое сопротивление линии  $Z_{\text{в}}(p)$ , ее длина  $l$ . Найдите изображения напряжения  $U(p, x)$  и тока  $I(p, x)$  в любой точке линии.

**8.41.** Кабель длиной  $l = 100$  м подключают к источнику постоянной ЭДС  $E = 100$  В. Погонные параметры кабеля:  $L_1 = 0,42$  мкГн/м;  $C_1 = 75$  пФ/м. Найдите напряжение  $u_2(t)$  на разомкнутом конце кабеля.

**8.42м.** На вход разомкнутой на конце однородной линии без потерь длиной  $l = 150$  км поступает прямоугольный импульс напряжения высотой  $E = 1$  кВ и длительностью  $t_{\text{и}} = 0,6$  мс. Считая источник входного напряжения идеаль-

ным, найдите распределение напряжения вдоль линии спущая 0,75 мс после подачи импульса на ее вход. Фазовая скорость в линии  $v_{\phi} = 3 \cdot 10^5$  км/с.

**8.43р.** Линия передачи длиной  $l = 150$  км с волновым сопротивлением  $R_{\text{в}} = 300$  Ом нагружена на последовательно соединенные резистор сопротивлением  $R_{\text{н}} = 300$  Ом и катушку, индуктивность которой  $L_{\text{н}} = 0,1$  Гн. В момент времени  $t = 0$  линия подключается к источнику с внутренним сопротивлением  $R_1 = 150$  Ом и постоянной ЭДС  $E = 1,5$  кВ. Определите напряжение  $u_2(t)$  на нагрузке в момент времени  $t_1 = 0,8$  мс. Фазовая скорость в линии  $v_{\phi} = 3 \cdot 10^5$  км/с.

**8.44.** Кабель длиной  $l = 100$  м нагружен на конденсатор емкостью  $C = 2 \cdot 10^{-9}$  Ф. Погонные параметры кабеля:  $L = 0,42$  мкГн/м;  $C_1 = 75$  пФ/м. На входе кабеля действует источник напряжения  $u_1(t) = 0$  с внутренним сопротивлением  $R_1 = 50$  Ом, причем  $u_1(t) = 0$  при  $t < 0$  и  $u_1(t) = 10$  В при  $t \geq 0$ . Найдите напряжение  $u_2(t)$  на нагрузке в момент времени  $t_1 = 0,8$  мкс.

**8.45р.** Цепь образована путем соединения трех длинных линий (см. рис. Т8.3). Параметры цепи:  $R_{\text{в}1} = R_{\text{в}2} = R_{\text{в}3} = 300$  Ом;  $R_2 = R_3 = 300$  Ом;  $l_1 = 150$  км;  $l_2 = 100$  км;  $l_3 = 120$  км. Фазовая скорость во всех линиях  $v_{\phi} = 3 \cdot 10^5$  км/с. В момент времени  $t = 0$  цепь подключают к источнику постоянного напряжения  $E = 1$  кВ с внутренним сопротивлением  $R_1 = 100$  Ом. Найдите распределение напряжения вдоль всех трех линий для момента времени  $t_1 = 0,8$  мс.

**8.46.** Решите задачу 8.45р для случая, когда линии  $L_2$  и  $L_3$  работают в режиме холостого хода на выходе ( $R_2 = R_3 = \infty$ ).

### Решения и методические указания

**8.38м.** Приняв  $\omega L_1 \gg R_1$ ,  $\omega C_1 \gg G_1$ , исследуйте приведенное в ответе к задаче 8.2м значение  $\alpha$  на минимум. В качестве независимой переменной возьмите величину  $\sqrt{L_1/C_1}$ .

**8.40м.** Изображения напряжения и тока в произвольном сечении  $x$  линии определите по следующим выражениям:

$$U(p, x) = Z_{\text{в}}(p)E(p)[e^{-\gamma x} + \rho_2 e^{-(2\gamma l - \gamma x)}]D;$$

$$I(p, x) = E(p)[e^{-\gamma x} + \rho_2 e^{-(2\gamma l - \gamma x)}]D,$$

где  $D = [Z_{\text{н}1}(p) + Z_{\text{в}}(p)](1 - \rho_1 \rho_2 e^{-2\gamma l})^{-1}$ ;  $\gamma = p\sqrt{L_1 C_1} = p/v_{\phi}$ ,

$$\rho_1(p) = \frac{Z_{\text{н}1}(p) - Z_{\text{в}}(p)}{Z_{\text{н}1}(p) + Z_{\text{в}}(p)}; \quad \rho_2(p) = \frac{Z_{\text{н}2}(p) - Z_{\text{в}}(p)}{Z_{\text{н}2}(p) + Z_{\text{в}}(p)}.$$

Замените выражение  $(1 - \rho_1 \rho_2 e^{-2\gamma l})^{-1}$  в этих формулах бесконечным степенным рядом.

**8.42м.** Используйте формулы, приведенные в ответе к задаче 8.40м, принимая  $\rho_1(p) = -1$ ;  $\rho_2(p) = 1$  и учитывая теорему запаздывания оригинала. Внешнее воздействие следует представить в виде суммы двух скачков, сдвинутых во времени на  $t_{\text{н}}$ , т.е.  $E(p) = (E - Ee^{-pt})p^{-1}$ .

**8.43р.** Волна напряжения достигает выхода линии через время  $t_0 = l/v_{\text{ф}} = 0,5$  мс после подключения линии к источнику энергии. С этого момента в сечении  $x = l$  начинается переходный процесс. В соответствии с условиями задачи необходимо определить напряжение  $u_2(t)$  для  $t = t_1 = 0,8$  мс  $> t_0$ . К этому времени волна уже отразилась от нагрузки и распространяется в обратном направлении.

Представим напряжение  $U_2(p)$  и ток  $I_2(p)$  на выходе линии в виде суммы падающей и отраженной волн:  $U_2(p) = U_{2\text{пад}}(p) + U_{2\text{отр}}(p)$ ;  $I_2(p) = I_{2\text{пад}}(p) + I_{2\text{отр}}(p)$ . Напряжение  $U_{2\text{отр}}(p)$  связано с  $U_{2\text{пад}}(p)$  коэффициентом отражения  $\rho_2$ :

$$U_{2\text{отр}}(p) = \rho_2 U_{2\text{пад}}(p) = \frac{Z_{\text{н}2}(p) - Z_{\text{в}}(p)}{Z_{\text{н}2}(p) + Z_{\text{в}}(p)} U_{2\text{пад}}(p).$$

Учитывая, что в любом сечении линии  $U_{\text{пад}}(p)/I_{\text{пад}}(p) = -U_{\text{отр}}(p)/I_{\text{отр}}(p) = Z_{\text{в}}(p)$ , получим

$$I_2(p) = \frac{2U_{2\text{пад}}(p)}{Z_{\text{н}2}(p) + Z_{\text{в}}(p)}; \quad U_2(p) = Z_{\text{н}2}(p)I_2(p) = \frac{2Z_{\text{н}2}(p)U_{2\text{пад}}(p)}{Z_{\text{н}2}(p) + Z_{\text{в}}(p)}.$$

Следовательно, ток  $I_2(p)$  после первого отражения от нагрузки равен току в цепи, образованной последовательным соединением сопротивлений  $Z_{\text{н}2}(p)$  и  $Z_{\text{в}}(p)$ , когда на входе действует напряжение  $2U_{\text{пад}}(p)$ . В общем случае (см. задачу 8.40м)

$$U_{\text{пад}}(p) = Z_{\text{в}}(p)E_{\text{в}}(p)[Z_{\text{н}1}(p) + Z_{\text{в}}(p)]^{-1}.$$

В данной задаче  $Z_{\text{н}2}(p) = pL_{\text{н}} + R_{\text{н}}$ ;  $Z_{\text{в}}(p) = R_{\text{в}} = 300$  Ом;  $Z_{\text{н}1}(p) = R_1 = 150$  Ом;  $E(p) = E/p = (1500/p)$  В·с, поэтому  $U_{2\text{пад}}(p) = (1000/p)$  В·с,  $U_{2\text{пад}} = 1000$  В.

В результате получаем

$$I_2(p) = 2U_{\text{пад}}(p)(pL + R_{\text{н}} + R_{\text{в}})^{-1} = 2U_{\text{пад}} \left[ Lp \left( p + \frac{R_{\text{н}} + R_{\text{в}}}{L} \right) \right]^{-1},$$

откуда

$$i_2(t) = \frac{2U_{2\text{пад}}}{R_{\text{н}} + R_{\text{в}}} (1 - e^{-(R_{\text{н}} + R_{\text{в}})t/L}).$$

Время в этой формуле следует отсчитывать с момента начала переходного процесса в нагрузке, т.е. при  $t_1 = 0,8$  мс нужно подставить в показатель экспоненты  $t = t_1 - t_0 = 0,3$  мс. Таким образом,  $i_2(t_1) = 3,49$  А;  $u_2(t_1) = 2u_{\text{пад}} - R_{\text{в}}i_2(t_1) = 952$  В.

**8.45р.** Напряжение падающей волны в линии  $L_1$  (см. задачу 8.43р)

$$U_{\text{пад}}(p) = Z_{\text{в1}}(p)E_{\text{в}}(p)[Z_{\text{н1}}(p) + Z_{\text{в1}}(p)]^{-1}.$$

Для данной задачи  $Z_{\text{в1}}(p) = R_{\text{в1}} = 300$  Ом;  $Z_{\text{н1}}(p) = R_1 = 100$  Ом;  $E(p) = E/p = (1000/p)$  В·с, откуда  $U_{\text{пад}}(p) = (750/p)$  В·с;  $U_{\text{пад}} = 750$  В.

Падающая волна достигает конца линии  $L_1$  за время  $t_0 = l_1/v_{\text{ф}} = 0,5$  мс, создавая вдоль нее напряжение  $U_{\text{пад}} = 750$  В. В месте соединения линий  $L_1 - L_3$  возникают отраженная волна, которая возвращается по  $L_1$  к источнику, и преломленные волны, распространяющиеся по линиям  $L_2$  и  $L_3$ . К моменту времени  $t = 0,8$  мс волны в  $L_2$  и  $L_3$  успевают продвинуться на расстояние  $(t_1 - t_0)v_{\text{ф}} = 90$  км от соединения. Длины линий  $L_2$  и  $L_3$  (соответственно 100 и 120 км) больше этого расстояния, следовательно, в линиях  $L_2, L_3$  существуют только падающие волны. Поскольку  $U_{\text{пад}}/I_{\text{пад}} = R_{\text{в}}$ , то можно сделать следующий вывод: нагрузку линии  $L_1$  создают линии  $L_2$  и  $L_3$  своими волновыми сопротивлениями.

При  $R_{\text{в2}} = R_{\text{в3}} = 300$  Ом сопротивление нагрузки линии  $L_1$   $R_{\text{н}} = R_{\text{в2}}/2 = 150$  Ом. Коэффициент отражения от конца линии  $L_1$   $\rho_2 = \frac{R_{\text{н}} - R_{\text{в1}}}{R_{\text{н}} + R_{\text{в1}}} = -\frac{1}{3}$ . Напряжение отраженной волны

$$U_{\text{отр}}(p) = \rho_2 U_{\text{пад}}(p) = -\frac{250}{p} \text{ В·с, } U_{\text{отр}} = -250 \text{ В.}$$

Отраженная волна за время  $t_1 - t_0 = 0,3$  мс распространяется на 90 км от конца линии  $L_1$  по направлению к источнику, частично разряжая линию  $L_1$  до напряжения  $U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}} = 500$  В.

Напряжение на выходе линии  $L_1$  (см. задачу 8.43р)

$$U_2(p) = \frac{2Z_{\text{н}}(p)U_{\text{пад}}(p)}{Z_{\text{н}}(p) + Z_{\text{в1}}(p)} = \frac{500}{p} \text{ В·с; } U_2 = 500 \text{ В.}$$

Это напряжение является входным для линий  $L_2$  и  $L_3$ , следовательно, напряжение преломленных волн  $U_{\text{пр}} = U_2 = 500$  В.

Таким образом, распределение напряжения вдоль линии  $L_1$  описывается выражением

$$u(x) = \begin{cases} 750 \text{ В} & \text{при } 0 \leq x < 90 \text{ км}, \\ 500 \text{ В} & \text{при } 90 \text{ км} \leq x \leq 150 \text{ км}. \end{cases}$$

В линиях  $L_2$  и  $L_3$

$$u(y) = \begin{cases} 500 \text{ В} & \text{при } 0 \leq x \leq 90 \text{ км}, \\ 0 & \text{при } y > 90 \text{ км} \end{cases}$$

(координату  $y$  отсчитывают от места соединения линий).

#### 8.4. Цепи с распределенными параметрами специальных типов

**8.47.** Неоднородная линия состоит из двух каскадно соединенных линий без потерь с волновыми сопротивлениями  $Z_{в1} = R_{в1} = 50 \text{ Ом}$ ;  $Z_{в2} = R_{в2} = 75 \text{ Ом}$  (рис. Т8.4). Найдите такие значения сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$ , при которых в неоднородной линии отсутствуют отраженные волны.

**8.48м.** Неоднородная линия без потерь состоит из трех каскадно соединенных участков, причем к обоим концам среднего участка подключены одинаковые реактивные сопротивления  $Z = j\omega L$  (рис. Т8.5). Погонные параметры  $L_1$ ,  $C_1$  всех трех участков одинаковы. Линия нагружена на элемент  $R_{н} = \sqrt{L_1/C_1}$ . Сформулируйте условия, при выполнении которых колебания некоторых частот проходят по линии без ослабления ( $U_2/U_1 = 1$ ).

**8.49.** Решите задачу 8.48м, принимая  $Z = 1/(j\omega L)$ .

**8.50м.** Однородная линия включена между источником напряжения и нагрузкой (см. рис. Т8.1). Погонные параметры линии  $L_1$ ,  $C_1$  положительны,  $R_1 = 0$ , а проводимость  $G_1 = -g_1 < 0$ . Принимая, что  $\omega C_1 \gg g_1$ ,  $Z_{н1} = Z_{н2} = R_{в} = \sqrt{L_1/C_1}$ , найдите значения параметра  $g_1$ , при которых рассматриваемая цепь обладает усилением по напряжению ( $U_2/E > 1$ ).

**8.51м.** В микроэлектронике применяют цепи, образованные чередующимися слоями резистивных и диэлектрических материалов. Одна из таких цепей изображена на рис. Т8.6, а. Высокопроводящий слой 1 («идеальный» про-

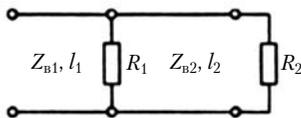


Рис. Т8.4

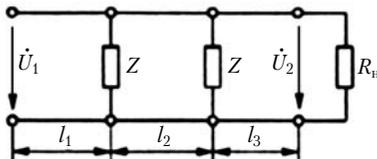


Рис. Т8.5

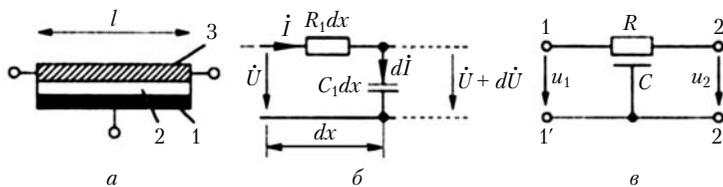


Рис. Т8.6

водник) отделен от резистивного слоя 3 диэлектриком 2. Выводы от проводящих слоев служат для подключения источника и нагрузки. Схема замещения элементарного участка цепи длиной  $dx$  приведена на рис. Т8.6, б, а условное обозначение микроэлектронной  $RC$ -цепи такого типа — на рис. Т8.6, в. Найдите  $A$ -,  $Z$ -,  $Y$ -параметры четырехполюсника, эквивалентного рассматриваемой цепи.

**8.52м.** Микроэлектронная  $RC$ -цепь (см. рис. Т8.6, в) длиной  $l = 0,01$  м обладает сопротивлением  $R_1 l = 10$  кОм и емкостью  $C_1 l = 500$  пФ. Вычислите коэффициент затухания  $\alpha$ , коэффициент фазы  $\beta$  и электрическую длину цепи  $l/\lambda$  на частотах 1 и 10 МГц.

**8.53м.** Электрический контакт резистивного 1 и высокопроводящего слоев 3 («идеального» проводника) показан на рис. Т8.7, а. Между этими слоями существует переходный слой 2, обусловленный рядом причин, в частности наличием оксидов. Схема замещения элементарного участка контакта приведена на рис. Т8.7, б. Выведите формулу для сопротивления контакта  $R_k$ , принимая известными погонные параметры  $R_1$ ,  $G_1$  и длину контакта  $l_k$ .

**8.54р.** Постройте АЧХ  $K_{21x}(\omega)$  и ФЧХ  $\psi_{21x}(\omega)$  четырехполюсника, изображенного на рис. Т8.6, в, в режиме холостого хода на выходе.

**8.55м.** Получите выражение для комплексного коэффициента передачи по напряжению  $K_{21x}(j\omega)$  четырехполюсника, изображенного на рис. Т8.8. Постройте АЧХ  $K_{21x}(\omega)$  четырехполюсника.

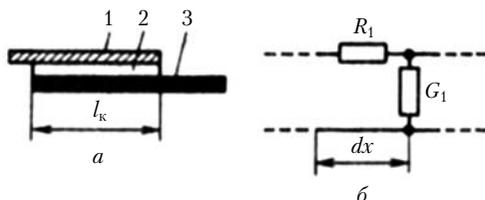


Рис. Т8.7

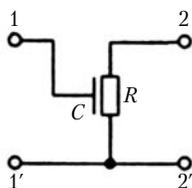


Рис. Т8.8

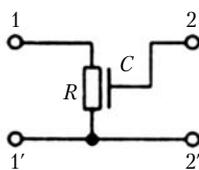


Рис. Т8.9

**8.56.** Решите задачу 8.55м для четырехполюсника, изображенного на рис. Т8.9.

**8.57м.** Найдите в общем виде выражения для комплексных сопротивлений микроэлектронных  $RC$ -двухполюсников, изображенных на рис. Т8.10,  $a - z$ .

**8.58р.** Четырехполюсник, образованный соединением микроэлектронной  $RC$ -цепи и элемента  $R_{\text{доп}}$ , работает в режиме холостого хода на выходе (рис. Т8.11). Покажите, что такой четырехполюсник может использоваться в качестве заградительного фильтра. Найдите частоты  $\omega_{0n}$  (частоты настройки фильтра), на которых  $K_{21x}(\omega) = 0$ . Сформулируйте требования к сопротивлению  $R_{\text{доп}}$ . Постройте АЧХ  $K_{21x}(\omega)$  четырехполюсника, у которого частота настройки имеет наименьшее значение.

**8.59р.** Найдите переходную характеристику микроэлектронной  $RC$ -цепи (см. рис. Т8.6,  $v$ ). Погонные параметры цепи  $R_1$ ,  $C_1$  и ее длина  $l$  заданы. Внешнее воздействие — напряжение на входе  $u_1$ , реакция цепи — напряжение на выходе  $u_2$ .

**8.60.** Выведите формулу для переходной характеристики микроэлектронной  $RC$ -цепи, изображенной на рис. Т8.8. Внешнее воздействие и реакция — напряжения на входе и выходе цепи.

**8.61.** Решите задачу 8.60 для микроэлектронной  $RC$ -цепи, представленной на рис. Т8.9.

**8.62м.** Основываясь на решении задачи 8.59р, постройте переходную характеристику микроэлектронной  $RC$ -цепи.

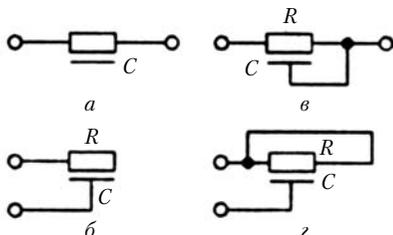


Рис. Т8.10

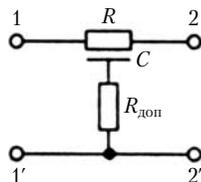


Рис. Т8.11

Определите параметры элементов  $R_{\text{ЭК}}$  и  $C_{\text{ЭК}}$  однозвенной  $RC$ -цепи, переходная характеристика которой аппроксимирует полученный график на интервале  $0 \leq t \leq \tau = R_1 l C_1 l$ . Сравните найденные результаты с переходной характеристикой однозвенной  $RC$ -цепи, у которой  $R = R_1 l$ ,  $C = C_1 l$ .

**8.63.** К входу экспоненциальной линии длиной  $l = 100$  м приложено напряжение  $u(0, t) = 10 \cos(2\pi \cdot 10^6 t + 1,5)$  В. Погонные параметры изменяются вдоль линии по закону  $L_1(x) = 1,8e^{-0,013x}$  мкГн/м;  $C_1(x) = 6,1e^{0,013x}$  пФ/м. Найдите напряжение  $u(l, t)$  на согласованной с линией нагрузке и ток  $i(l, t)$  в нагрузке.

**8.64м.** Как изменятся результаты решения задачи 8.63, если вход и выход линии поменять местами?

**8.65м.** Однородная линия с волновым сопротивлением  $R_{\text{в0}} = 75$  Ом присоединена к нагрузке сопротивлением  $R_{\text{н}} = 300$  Ом через согласующее устройство, представляющее собой отрезок экспоненциальной линии длиной  $l$ . Коэффициент, определяющий закон изменения погонных параметров вдоль линии, равен по абсолютному значению  $q = 0,6 \text{ м}^{-1}$ . Частота внешнего гармонического воздействия  $f = 1$  МГц. Определите длину  $l$  согласующего устройства. Сохранится ли согласование основной линии с нагрузкой при изменении частоты внешнего воздействия?

**8.66.** Решите задачу 8.65м, если  $R_{\text{в0}} = 300$  Ом;  $R_{\text{н}} = 75$  Ом.

### Решения и методические указания

**8.48м.** В однородной линии без потерь, нагруженной на элемент  $R_{\text{н}} = R_{\text{в}}$ , на всех частотах  $U_2/U_1 = 1$ . В рассматриваемой неоднородной линии  $U_2/U_1 = 1$  лишь на некоторых частотах. Нетрудно видеть, что на этих частотах входное сопротивление  $Z_{11}(j\omega)$  симметричного четырехполюсника, образованного средним участком линии и подключенными к нему индуктивными элементами, равно волновому сопротивлению  $R_{\text{в}} = \sqrt{L_1/C_1}$ . Сопротивление  $Z_{11}(j\omega)$  можно найти по известным  $A$ -параметрам, учитывая, что четырехполюсник нагружен на входное сопротивление третьего участка линии.

**8.50м.** Используйте результаты решения задач 8.2 и 8.15м. Ограничиваясь простейшим случаем согласованного включения четырехполюсника ( $Z_{\text{н1}} = Z_{\text{н2}} = Z_{\text{в}}$ ), найдите значения  $g_1$ , при которых  $U_2/E > 1$ .

**8.51м.** Рассматриваемый четырехполюсник можно считать частным случаем четырехполюсника, образованного отрезком однородной линии общего вида, при  $L_1 = 0$  и  $G_1 = 0$ .

**8.52м.** Для микроэлектронной  $RC$ -цепи данного типа коэффициент распространения  $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega R_1 C_1}$  (см. задачу 8.51м). Отсюда  $\alpha = \sqrt{\omega R_1 C_1/2}$ ;  $\beta = \sqrt{\omega R_1 C_1/2}$ .

**8.53м.** Рассматривая участок контакта как четырехполюсник, устанавливаем, что сопротивление контакта представляет собой входное сопротивление данного четырехполюсника в режиме холостого хода на выходе. Для определения  $R_k = Z_{11}$  можно использовать формулы для  $Z_{11}$ ,  $Z_B$  и  $\gamma$  однородной линии общего вида, принимая  $L_1 = 0$ ;  $C_1 = 0$ .

**8.54р.** Комплексный коэффициент передачи четырехполюсника в режиме холостого хода на выходе найдем, используя полученное при решении задачи 8.51м выражение для параметра  $A_{11}$  четырехполюсника:

$$K_{21x}(j\omega) = \frac{1}{A_{11}} = \frac{1}{\operatorname{ch}(l\sqrt{j\omega R_1 C_1})}$$

Учтя, что  $\sqrt{j} = (1 + j)\sqrt{2}$ , и преобразовав гиперболическую функцию комплексного аргумента, найдем

$$K_{21x}(j\xi) = \frac{1}{\operatorname{ch} \xi \cos \xi + j \operatorname{sh} \xi \sin \xi},$$

где  $\xi = l\sqrt{\omega R_1 C_1/2}$  — нормированная частота.

Построенные по этому выражению зависимости  $K_{21x}(\xi)$ ,  $\psi_{21x}(\xi)$  изображены на рис. Т8.12, *а*, *б*. Очевидно, что этот четырехполюсник может быть использован в качестве фильтра нижних частот.

**8.55м.** Сначала найдите неопределенную матрицу проводимостей четырехполюсника, изображенного на рис. Т8.6, *в*, используя полученные при решении задачи 8.51м выражения для  $Y$ -параметров. Далее определите укороченную матрицу проводимостей четырехполюсника, включенного соглас-

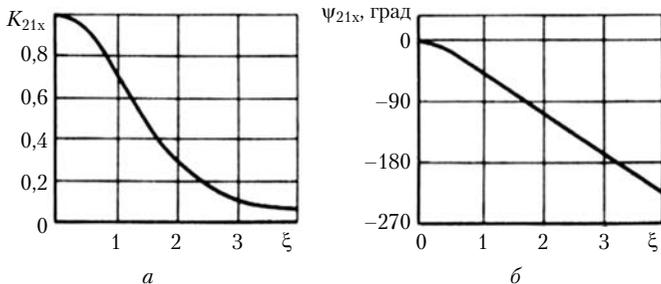


Рис. Т8.12

но рис. Т8.8 (см. задачу 7.1), и найдите коэффициент  $K_{21x}(j\omega)$  (см. задачу 7.60).

АЧХ четырехполюсника, представленного на рис. Т8.8, показана на рис. Т8.13. Переменная имеет тот же смысл, что и в задаче 8.54р. Особенностью АЧХ является наличие области частот, в которой коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению достигает значений, больших единицы. Рассматриваемый четырехполюсник может быть применен в качестве фильтра верхних частот.

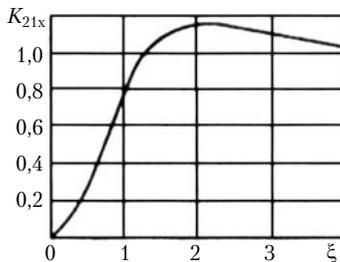


Рис. Т8.13

**8.57м.** Составьте Т-образную схему замещения цепи, изображенной на рис. Т8.6, в, применив найденные при решении задачи 8.51м формулы для  $Z$ -параметров. Определите сопротивления между различными точками схемы замещения, выбирая эти точки в соответствии с рис. Т8.10,  $a - z$ .

**8.58р.** Четырехполюсник представляет собой регулярное последовательное соединение двух элементарных четырехполюсников.  $Z$ -параметры таких четырехполюсников определены при решении задач 7.13 и 8.51м. Первичные параметры четырехполюсника  $Z_{11} = Z_{22} = R_1 l \theta^{-1} \operatorname{ch} \theta + R_{\text{доп}}$ ;  $Z_{12} = Z_{21} = R_1 l \theta^{-1} \operatorname{ch} \theta + R_{\text{доп}}$ , где  $\theta = l \sqrt{j\omega R_1 C_1}$ . Коэффициент  $K_{21x}(j\omega) = Z_{21}/Z_{11}$  (см. выражение для  $K_{21x}(j\omega)$  через  $Z$ -параметры в задаче 7.59р). Таким образом,

$$K_{21x}(j\omega) = \frac{Z_{21}}{Z_{11}} = \frac{a + \theta \operatorname{sh} \theta}{a \operatorname{ch} \theta + \theta \operatorname{sh} \theta} = \frac{N(\theta)}{D(\theta)},$$

где  $\theta = l \sqrt{j\omega R_1 C_1} = (1 + j)\xi$ ;  $R_1, C_1$  — погонные параметры,  $l$  — длина микроэлектронной  $RC$ -цепи;  $\xi = l \sqrt{\omega R_1 C_1} / 2$  — нормированная частота;  $a = R_1 l / R_{\text{доп}}$ .

Рассмотрим уравнение  $N(\theta) = a + \theta \operatorname{sh} \theta = 0$ . Принимая во внимание, что  $\theta = (1 + j)\xi$ , а гиперболический синус комплексного аргумента  $\operatorname{sh}(x + jy) = \operatorname{sh} x \cos y + j \operatorname{ch} x \sin y$ , находим, что частоты настройки фильтра  $\xi_{0n}$  удовлетворяют уравнению  $\operatorname{tg} \xi = -\operatorname{th} \xi$  и им соответствуют значения  $a_n$  параметра  $a$ :

$$a_n = \xi (\operatorname{ch} \xi \sin \xi - \operatorname{sh} \xi \cos \xi) \Big|_{\xi = \xi_{0n}}.$$

Следовательно, существует бесконечное множество значений  $\xi_{0n}$  и  $a_n$ . Приближенные значения  $\xi_{0n}$  можно найти

достаточно просто, если учесть свойство функции  $\operatorname{tg} \xi$ :  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \xi = 1$ . Практически уже при  $\xi \leq 1,6$  имеем  $\operatorname{tg} \xi \geq 0,92$ , поэтому уравнение  $\operatorname{tg} \xi = -\operatorname{th} \xi$  можно заменять более простым уравнением  $\operatorname{tg} \xi = -1$ , формальное решение которого имеет вид

$$\xi_{0n} = -\pi/4 + \pi n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Однако не все корни этого уравнения соответствуют частотам настройки фильтра. Действительно, при четных  $n \sin \xi_{0n} < 0$ ,  $a < 0$  и  $R_{\text{доп}n} = R_1 l / a_n < 0$ , что неприемлемо по физическим соображениям. Таким образом,

$$\xi_{0n} = -\pi/4 + \pi(2n - 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Напомним, что это корни уравнения  $\operatorname{tg} \xi = -1$ , а не уравнения  $\operatorname{tg} \xi = -\operatorname{th} \xi$ , поэтому они нуждаются в уточнении. При  $n = 1$  приближенное значение корня последнего уравнения  $\xi_{01} \approx -\pi/4 + \pi = 2,36$ ; его уточненное значение  $\xi_{01} = 2,37$ , причем  $a_1 = 17,8$ . Значения последующих корней уточнять нет необходимости ввиду малости поправок, поэтому

$$\xi_{0n} = -\pi/4 + \pi(2n - 1) \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

В результате получим  $\xi_{02} = 8,64$ ,  $\xi_{0e} = 14,9$  и т.д. При  $n \geq 2$   $\xi_{0n} \gg 1$ ;  $\operatorname{sh} \xi_{0n} \approx \operatorname{ch} \xi_{0n} \approx 0,5e^{\xi_{0n}}$ ;  $\sin \xi_{0n} \approx -\cos \xi_{0n} \approx 1/\sqrt{2}$ . Следовательно,

$$a_n \approx \xi_{0n} e^{\xi_{0n}} / \sqrt{2} \quad (n \geq 2).$$

По известным значениям  $\xi_{0n}$ ,  $a_n$  легко определить значение сопротивления  $R_{\text{доп}n}$ , которое обеспечивает выполнение условия  $K_{21x}(\omega) = 0$  на частоте  $\omega_{0n}$ .

$$R_{\text{доп}n} = R_1 l / a_n; \quad \omega_{0n} = 2\xi_{0n}^2 (R_1 l C_1 l)^{-1}.$$

При  $n = 1$   $R_{\text{доп}1} = 0,056 R_1 l$ ;  $\omega_{01} = 11,2 (R_1 l C_1 l)^{-1}$ .

Заметим также, что при  $\xi = \xi_{0n}$  и  $a = a_n$  знаменатель  $D(\theta)$  формулы для  $K_{21x}(j\omega)$  не обращается в ноль и, следовательно, не возникает неопределенность вида  $0/0$ .

Частота настройки фильтра имеет наименьшее значение при  $a = 17,8$ . Построенная до этого случая АЧХ фильтра приведена на рис. Т8.14.

**8.59р.** Комплексный коэффициент передачи цепи по напряжению в режиме холостого хода на выходе  $K_{21x}(j\omega) =$

$$= \frac{1}{\operatorname{ch}(l\sqrt{j\omega R_1 C_1})} \quad (\text{см. задачу 8.54р.})$$

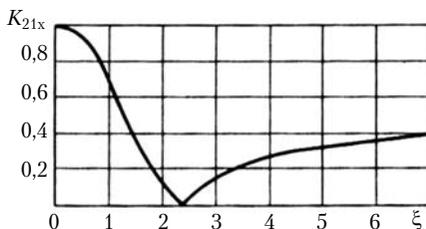


Рис. Т8.14

Для принятых в задаче воздействия и реакции изображением переходной характеристики цепи является функция  $K_{21x}(p)/p$ , т.е.

$$g(t) \doteq K_{21x}(p)p^{-1} = [p \operatorname{ch}(l\sqrt{pR_1C_1})]^{-1}.$$

Корни уравнения  $p \operatorname{ch}(l\sqrt{pR_1C_1}) = 0$ :

$$p_0 = 0, \quad p_n = -\left[ \frac{2n-1}{l\sqrt{R_1C_1}} \frac{\pi}{2} \right]^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Применяя теорему разложения, находим

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{p_n t}}{\left. \frac{d}{dp} [p \operatorname{ch}(l\sqrt{pR_1C_1})] \right|_{p=p_n}} = \\ &= 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \exp \left[ -\frac{\pi^2 (2n-1)^2 t}{4 R_1 l C_1 l} \right]. \end{aligned}$$

**8.62м.** Переходную характеристику микроселекционной  $RC$ -цепи рассчитайте по формуле, полученной при решении задачи 8.59р. Контрольные точки этой характеристики следующие:

$T_i$	0	0,25	0,40	0,50	0,75	1,0
$g(T_i)$	0	0,317	0,526	0,617	0,783	0,892

( $T = t(R_1 l C_1 l)^{-1}$  — нормированное время).

Переходная характеристика эквивалентной однозвенной  $RC$ -цепи имеет экспоненциальный характер:  $g_{\text{ЭК}}(t) = 1 - e^{-t/R_{\text{ЭК}}C_{\text{ЭК}}}$ , поэтому удобно ввести вспомогательные функции  $\psi = \ln[1 - g(t)]$ ;  $\psi_{\text{ЭК}} = \ln[1 - g_{\text{ЭК}}(t)] = -t/(R_{\text{ЭК}}C_{\text{ЭК}})$ . Теперь задача сводится к аппроксимации функции  $\psi(T)$  линейной функцией  $-kT$ . Аппроксимацию осуществите графически или методом наименьших квадратов (см., например, задачу 5.22р).

По известному значению коэффициента  $k$  найдите постоянную времени эквивалентной цепи:  $R_{\text{эк}}C_{\text{эк}} = \frac{1}{k}R_1lC_1l$ .

**8.64м.** Коэффициент  $q$ , характеризующий законы изменения погонных параметров вдоль линии, сменит знак на противоположный:  $q = -0,013 \text{ м}^{-1}$ .

**8.65м.** Знак коэффициента  $q$  и длину отрезка экспоненциальной линии  $l$  можно найти из условий  $R_{\text{в}}(0) = R_{\text{в}0}$ ;  $R_{\text{в}}(l) = R_{\text{н}}$ . Примечательно, что длина  $l$  никак не связана с частотой внешнего воздействия.

# Глава 9

## СИНТЕЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

### 9.1. Свойства и критерии физической реализуемости операторных входных функций пассивных линейных электрических цепей

**9.1.** Определите входные сопротивления цепей (рис. Т9.1, а, б) и представьте их в виде отношения двух полиномов  $p$ .

**9.2.** Определите входные проводимости цепей (рис. Т9.1, в, г) и представьте их в виде отношения двух полиномов  $p$ .

**9.3.** Проверьте, являются ли заданные функции  $F_i(p)$  положительными вещественными функциями:

$$\begin{aligned} \text{а) } F_1(p) &= \frac{12p^4 + 12p^2 + 1}{12p^3 + 3p}; & \text{б) } F_2(p) &= \frac{6p^2 + 3p}{12p^4 + 12p^2 + 1}; \\ \text{в) } F_3(p) &= \frac{25 \cdot 10^{-12}p^2 + 1}{0,5 \cdot 10^{-12}p^3 + 70 \cdot 10^{-3}p}; & \text{г) } F_4(p) &= \frac{12p^2 + p + 1}{6p^3 + 3p}. \end{aligned}$$

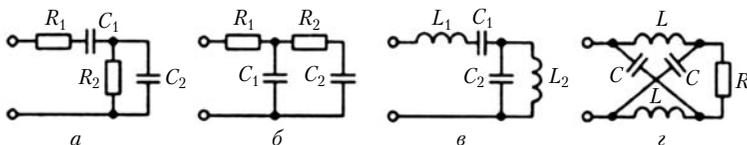


Рис. Т9.1

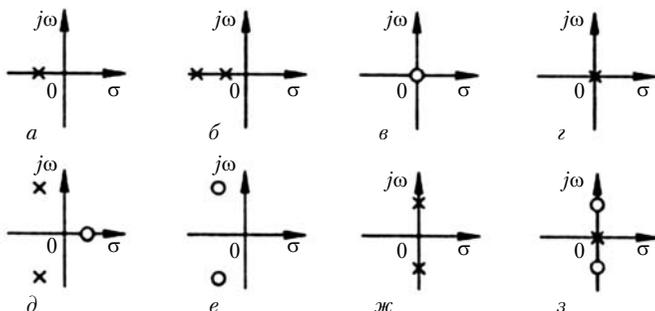


Рис. Т9.2

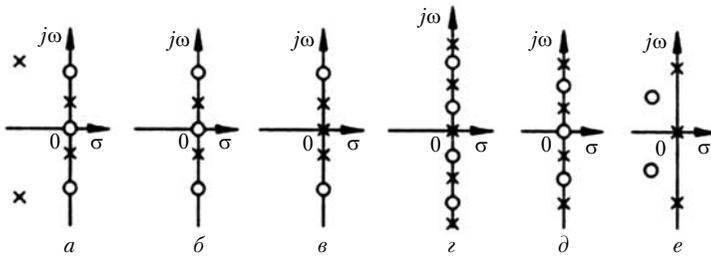


Рис. Т9.3

**9.4р.** На рис. Т9.2, *a* – *з* показаны полюсно-нулевые диаграммы входных сопротивлений (проводимостей) двухполюсных цепей. Какие диаграммы физически нереализуемы с помощью линейных пассивных цепей?

**9.5р.** На рис. Т9.3, *a* – *e* представлены полюсно-нулевые диаграммы входных сопротивлений (проводимостей) двухполюсных цепей. Какие диаграммы физически нереализуемы с помощью линейных пассивных LC-цепей без потерь?

**9.6р.** На рис. Т9.4, *a* – *e* показаны полюсно-нулевые диаграммы входных сопротивлений двухполюсных цепей. Какие диаграммы физически нереализуемы с помощью RC-цепей?

**9.7.** Решите задачу 9.6р для входных сопротивлений RL-цепей.

**9.8.** На рис. Т9.5, *a* – *г* показаны полюсно-нулевые диаграммы входных сопротивлений двухполюсных цепей. Какие диаграммы относятся к RL-, а какие – к RC-цепям?

**9.9р.** Может ли двухполюсник состоять из элементов *R* и *C*, если:

$$\text{а) } Z(p) = \frac{p^2 + 3p + 2}{p(p + 4)} \text{ Ом;} \quad \text{б) } Z(p) = \frac{p^2 + 6p + 5}{p(p + 4)} \text{ Ом?}$$

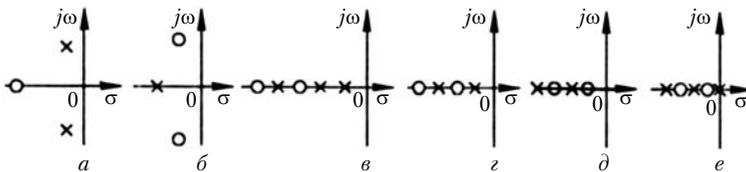


Рис. Т9.4

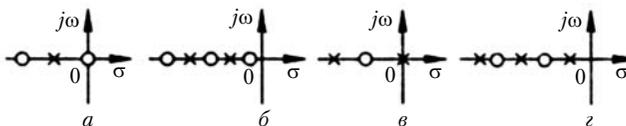


Рис. Т9.5

**9.10.** Может ли двухполюсник состоять из элементов  $R$  и  $L$ , если:

$$\begin{aligned} \text{а) } Z(p) &= \frac{p(p+1)}{p+2} \text{ Ом;} & \text{б) } Z(p) &= \frac{p+1}{p(p+2)} \text{ Ом;} \\ \text{в) } Z(p) &= \frac{p^2+4p+3}{p+2} \text{ Ом;} & \text{г) } Z(p) &= \frac{p^2+3p+2}{p^2+7p+12} \text{ Ом?} \end{aligned}$$

**9.11.** Может ли двухполюсник состоять из элементов  $L$  и  $C$ , если:

$$\begin{aligned} \text{а) } Z(p) &= \frac{p^2+2}{p(p^2+1)} \text{ Ом;} & \text{б) } Z(p) &= \frac{p(p^2+4)}{p^2+1} \text{ Ом;} \\ \text{в) } Z(p) &= \frac{p(p^2+4)}{p^2+2p+2} \text{ Ом?} \end{aligned}$$

**9.12.** На рис. Т9.6,  $a - d$  приведены полюсно-нулевые диаграммы некоторых функций комплексной переменной  $F_i(p)$ . Какие из этих функций могут быть физически реализованы в качестве операторного входного сопротивления (операторной входной проводимости) линейного пассивного двухполюсника и с помощью каких элементов?

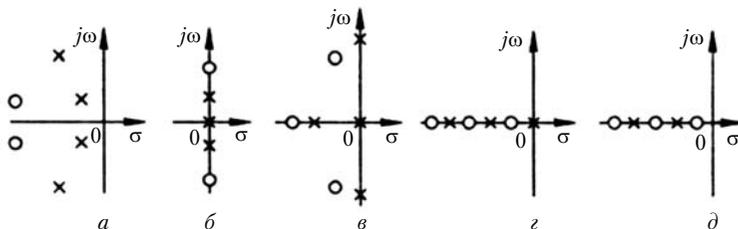


Рис. Т9.6

**9.13р.** Функция  $F(p)$  имеет полюсы  $p_{x1} = -1 + j c^{-1}$ ,  $p_{x2} = -1 - j c^{-1}$  и один отрицательный вещественный нуль  $p_0 = -a$ . Каким должно быть допустимое значение  $a$ , чтобы эта функция представляла собой входное сопротивление (входную проводимость) физически реализуемой пассивной линейной цепи?

**9.14м.** Функция  $F(p)$  имеет вид  $F(p) = \frac{p^2+4p+a}{p^2+6p+8}$ . Каким условиям должна удовлетворять величина  $a$ , чтобы эту функцию можно было реализовать с помощью линейной пассивной цепи?

**9.15р.** Постройте качественно зависимости от частоты реактивной составляющей входного сопротивления  $x(\omega)$

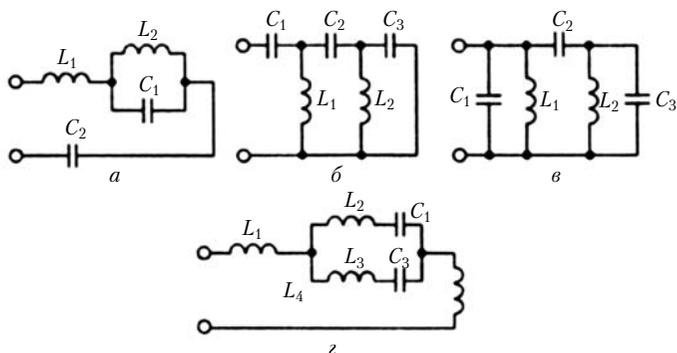


Рис. Т9.7

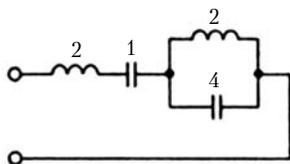


Рис. Т9.8

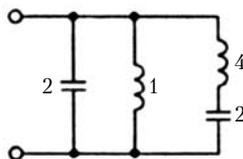


Рис. Т9.9

и входной проводимости  $b(\omega)$  реактивных двухполюсников (рис. Т9.7,  $a - в$ ).

**9.16.** Запишите выражение для входного сопротивления  $Z(p)$  цепи (рис. Т9.8)<sup>1</sup> в виде отношения двух полиномов  $p$ .

**9.17.** Запишите выражение для входной проводимости  $Y(p)$  двухполюсника (рис. Т9.9) в виде отношения двух полиномов  $p$ .

### Решения и методические указания

**9.4р.** Физически нереализуемы с помощью пассивных цепей следующие полюсно-нулевые диаграммы входных сопротивлений (проводимостей): 1) диаграмма (см. рис. Т9.2, б), так как есть два полюса и ни одного нуля, соответственно степень числителя функции  $Z(p)[Y(p)]$  меньше степени знаменателя на 2; 2) диаграмма (см. рис. Т9.2, д), так как есть нуль в правой полуплоскости; 3) диаграмма (см. рис. Т9.2, е), так как есть два нуля и ни одного полюса; 4) диаграмма (см. рис. Т9.2, ж), поскольку есть два полюса и ни одного нуля.

**9.5р.** Физически нереализуемы с помощью пассивных LC-цепей без потерь следующие полюсно-нулевые диаграм-

<sup>1</sup> На рис. 9.8, 9.9, 9.12 и 9.13 индуктивности элементов указаны в генри, емкости — в фарадах, сопротивления — в омах.

мы входных сопротивлений (проводимостей): 1) диаграммы (см. рис. Т9.3, *a, e*), так как есть комплексно-сопряженные полюсы и нули с ненулевой вещественной частью; 2) диаграммы (см. рис. Т9.3, *б, в*), поскольку полюсы расположены на мнимой оси подряд, не чередуясь с нулями.

**9.6р.** Физически нереализуемы с помощью пассивных *RC*-цепей следующие полюсно-нулевые диаграммы входных сопротивлений: 1) диаграмма (см. рис. Т9.4, *a*), так как есть комплексно-сопряженные полюсы; 2) диаграмма (см. рис. Т9.4, *б*), поскольку есть комплексно-сопряженные нули; 3) диаграмма (см. рис. Т9.4, *в*), так как есть два подряд расположенных полюса; 4) диаграмма (см. рис. Т9.4, *д*), поскольку нуль расположен ближе к началу координат, чем полюс.

**9.9р.** а) Найдем полюсы и нули функции  $Z(p)$ :  $p_{x1} = 0$ ;  $p_{x2} = -4 \text{ с}^{-1}$ ;  $p_{01} = -1 \text{ с}^{-1}$ ;  $p_{02} = -2 \text{ с}^{-1}$ . Два нуля следуют подряд, не чередуясь с полюсами. Двухполюсник не может состоять только из элементов *R* и *C*.

б) Определим полюсы и нули функции  $Z(p)$ :  $p_{x1} = 0$ ;  $p_{x2} = -4 \text{ с}^{-1}$ ;  $p_{01} = -1 \text{ с}^{-1}$ ;  $p_{02} = -5 \text{ с}^{-1}$ . Двухполюсник может состоять из элементов *R* и *C*, поскольку выполняются необходимые ограничения на расположение полюсов и нулей (см. задачу 9.6р).

**9.12м.** Физически реализуемые функции должны быть положительными и вещественными. Наличие комплексно-сопряженных полюсов (нулей) указывает на цепи из элементов *L* и *C*. *RC*- и *RL*-цепи имеют полюсы и нули, расположенные на вещественной отрицательной полуоси, причем наличие полюса функции  $Z(p)$  в начале координат или же расположение полюса ближе к началу координат, чем нуля, указывает на *RC*-цепь.

**9.13р.** Задание полюсов и нулей определяет функцию  $F(p)$  с точностью до постоянного множителя  $k$ :  $F(p) = k \frac{p + a}{p^2 + 2p + 2}$ .

Нужно выяснить, при каком значении  $a$  функция  $F(p)$  является положительной и вещественной. Значение  $a$  должно быть таким, чтобы на любой частоте  $\text{Re}[F(j\omega)] \geq 0$ . Следовательно,

$$\text{Re}[F(j\omega)] = k \frac{a(2 - \omega^2) + 2\omega^2}{(2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2} \geq 0.$$

Это неравенство выполняется при  $0 \leq a \leq 2$ . Если  $a > 2$ , то вещественная составляющая  $\text{Re}[F(j\omega)]$  может стать отрицательной.

**9.14м.** Задача решается аналогично предыдущей. Значение  $a$  должно быть таким, чтобы вещественная составляющая

$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] = \frac{(-\omega^2 + a)(-\omega^2 + 8) + 24\omega^2}{(-\omega^2 + 8)^2 + 36\omega^2}$$

была бы неотрицательной на любой частоте.

**9.15р.** Рассмотрим двухполосник, изображенный на рис. Т9.7, *а*. Двухполосник содержит  $N = 4$  независимо включенных реактивных элемента. Следовательно, частотная характеристика  $x(\omega)$  двухполосника должна иметь  $N + 1 = 5$  экстремумов, из которых  $N - 1 = 3$  являются внутренними. Входное сопротивление двухполосника бесконечно велико при  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$ . Поэтому частотная характеристика имеет полюсы при этих значениях. Располагаем на частотной оси все экстремумы, учитывая, что первый по счету полюс находится в точке  $\omega = 0$ , а нули и полюсы чередуются (рис. Т9.10, *а*).

Строим качественно зависимость  $x(\omega)$ , проводя кривую так, чтобы производная  $dx/d\omega$  была положительной в точ-

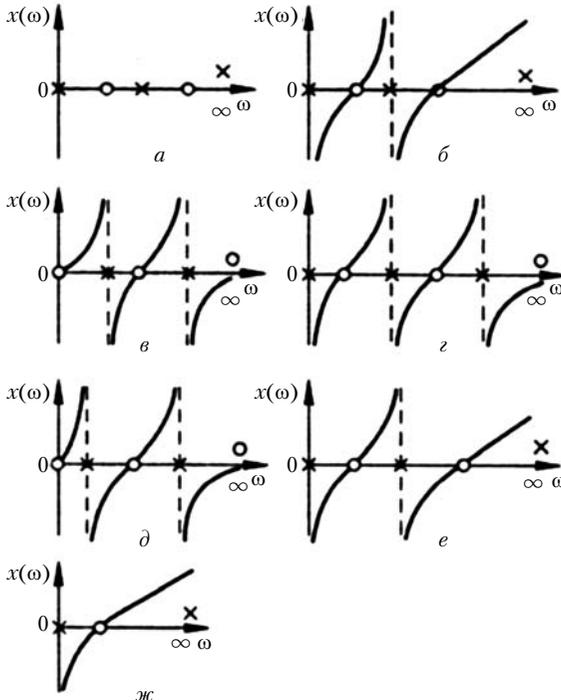


Рис. Т9.10

ках непрерывности функции  $x(\omega)$  (рис. Т9.10, б). Далее строим зависимость  $b(\omega)$ , учитывая, что нулям функции в  $b(\omega)$  соответствуют полюсы функции  $x(\omega)$  (рис. Т9.10, в).

Аналогичным образом можно получить частотные характеристики остальных двухполосников. Частотная характеристика  $x(\omega)$  двухполосника, изображенного на рис. Т9.7, б, относится к типу  $(x-0)$  и имеет шесть экстремумов (рис. Т9.10, з).

Двухполосник на рис. Т9.7, в имеет частотную характеристику  $x(\omega)$  типа  $(0-0)$ , у которой существует пять экстремумов, так как число независимо включенных реактивных элементов, входящих в двухполосник, равно четырем (элементы  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  образуют емкостный контур). Частотная характеристика этого двухполосника приведена на рис. Т9.10, д.

Двухполосник на рис. Т9.7, г содержит четыре независимо включенных реактивных элемента. Индуктивные элементы  $L_1$  и  $L_4$  включены последовательно и могут быть заменены одним  $L_{эк1}$ , образующим вместе с  $L_2$  и  $L_3$  индуктивный узел. Частотная характеристика этого двухполосника приведена на рис. Т9.10, е. При  $L_2 = L_3$  и  $C_1 = C_2$  число независимо включенных реактивных элементов уменьшается до двух, и частотная характеристика  $x(\omega)$  имеет один нуль и два полюса (рис. Т9.10, ж).

## 9.2. Методы реализации реактивных двухполосников

**9.18р.** Положительная вещественная функция  $F(p)$  представлена в виде  $F(p) = 3p + \frac{5}{p} + \frac{4p}{p^2 + 4} + \frac{6p}{p^2 + 9}$ .

Полагая, что  $F(p)$  имеет смысл входного сопротивления некоторой цепи, постройте ее схему и определите параметры элементов.

**9.19м.** Решите предыдущую задачу для случая, когда  $F(p)$  имеет смысл входной проводимости некоторой цепи.

**9.20.** Определите тип частотной характеристики цепи, входное сопротивление которой  $Z(p) = \frac{12p^4 + 12p^2 + 1}{6p^3 + 3p}$  Ом.

Найдите качественно канонические схемы Фостера, реализующие данное входное сопротивление.

**9.21р.** Реализуйте функцию

$$Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{0,5 \cdot 10^{-12} p^3 + 70 \cdot 10^{-3} p}{25 \cdot 10^{-12} p^2 + 1} \text{ Ом}$$

методом выделения простейших составляющих. Найдите два возможных варианта решения.

**9.22.** Реализуйте функцию  $Z(p) = \frac{25 \cdot 10^{-12} p^2 + 1}{0,5 \cdot 10^{-12} p^3 + 70 \cdot 10^{-3} p}$  Ом методом выделения простейших составляющих.

**9.23.** Реализуйте функцию  $Z(p) = \frac{18p^4 + 17p^2 + 1}{18p^3 + 2p}$  Ом в виде первой канонической схемы Фостера.

**9.24.** Найдите два варианта реализации функции  $Z(p) = \frac{36p^4 + 13p^2 + 1}{48p^3 + 7p}$  Ом методом выделения простейших составляющих.

**9.25.** Как, используя решение предыдущей задачи, построить схемы цепей, имеющие входное сопротивление в 10 раз больше исходного?

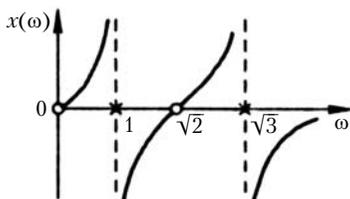


Рис. Т9.11

**9.26м.** Найдите две цепи, построенные по схемам Фостера, частотная характеристика входного сопротивления которых  $x(\omega)$  задана графиком (рис. Т9.11). Учтите, что  $\lim_{p \rightarrow \infty} [pZ(p)] = 1$ .

**9.27.** Запишите выражение для входного сопротивления лестничной цепи (рис. Т9.12) в виде непрерывной (цепной) дроби.

**9.28.** Запишите выражение для входной проводимости лестничной цепи (рис. Т9.13) в виде непрерывной (цепной) дроби.

**9.29р.** Входное сопротивление некоторой лестничной цепи задано в виде непрерывной дроби

$$Z(p) = 2p + \frac{1}{3p + \frac{1}{p + \frac{1}{4p}}} \text{ Ом.}$$

Найдите схему цепи и определите параметры ее элементов.

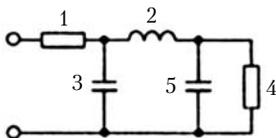


Рис. Т9.12

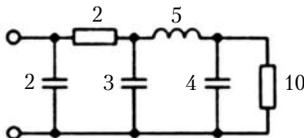


Рис. Т9.13

**9.30.** Решите задачу 9.29р для

$$Z(p) = 2 + \frac{1}{2p + \frac{1}{\frac{1}{3p} + \frac{1}{4p}}} \text{ Ом.}$$

**9.31.** Входная проводимость некоторой лестничной цепи задана в виде непрерывной дроби

$$Y(p) = 2p + \frac{1}{\frac{3}{p} + \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{4p}}} \text{ См.}$$

Составьте схему цепи и найдите параметры ее элементов.

**9.32.** Решите задачу 9.31 для

$$Y(p) = p + \frac{1}{2 + \frac{1}{3p + \frac{1}{4p}}} \text{ См.}$$

**9.33р.** Реализуйте функцию  $Z(p) = \frac{6p^3 + 3p}{12p^4 + 12p^2 + 1}$  Ом методом разложения в цепную дробь.

**9.34.** Функция операторного входного сопротивления  $Z(p) = \frac{6p^3 + 3p}{5p^2 + 1}$  Ом. Найдите обе канонические реализации цепи по Кауэру.

**9.35.** Найдите две цепи лестничной структуры, имеющие входное сопротивление  $Z(p) = \frac{3p^2 + 1}{6p^3 + 3p}$  Ом.

**9.36.** Реализуйте функцию входного сопротивления  $Z(p) = \frac{24p^3 + 18p^2 + 1}{24p^3 + 6p}$  Ом методом разложения в цепную дробь.

**9.37.** Найдите параметры элементов цепей, построенных по каноническим схемам Кауэра, реализующих функцию входного сопротивления  $Z(p) = \frac{12p^4 + 11p^2 + 1}{18p^3 + 2p}$  Ом.

**9.38.** Реализуйте функцию входного сопротивления  $Z(p) = \frac{24p^4 + 20p^2 + 1}{48p^5 + 52p^3 + 6p}$  Ом в виде цепи, построенной по первой канонической схеме Кауэра.

**9.39.** Функция входного сопротивления  $Z(p)$  реализована методом разложения в цепную дробь. Как нужно изменить сопротивления продольных ветвей и проводимости поперечных ветвей полученной лестничной цепи, чтобы преобразованная цепь имела входное сопротивление  $QZ(p)$ , где  $Q$  — вещественное положительное число?

**9.40м.** Зависимость от частоты мнимой составляющей комплексного входного сопротивления реактивного двухполюсника  $x(\omega)$  приведена на рис. Т9.14;  $\lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \frac{Z(p)}{p} \right] = 1,2$ . Найдите две реализации этой характеристики по Кауэру.

**9.41.** Найдите параметры элементов двух лестничных цепей, частотная характеристика входного сопротивления которых показана на рис. Т9.15. Учтите, что  $\lim_{p \rightarrow \infty} [pZ(p)] = 0,5$ .

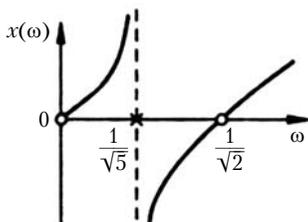


Рис. Т9.14

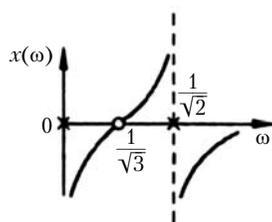


Рис. Т9.15

**9.42.** Реализуйте частотную характеристику входного сопротивления  $x(\omega)$  двухполюсника (см. рис. Т9.11) в виде двух канонических схем Кауэра. Учтите, что  $\lim_{p \rightarrow \infty} [pZ(p)] = 1$ .

**9.43р.** К пассивному двухполюснику при нулевых начальных условиях подключают источник тока  $i(t) = 100t$  А. Напряжение на входных зажимах двухполюсника  $u(t) = 10^5 t - 500(1 - e^{-100t})$  В. Определите схему двухполюсника и параметры входящих в нее элементов.

**9.44м.** При нулевых начальных условиях к пассивному двухполюснику подключают источник ЭДС  $e(t) = 100t$  В. Ток через двухполюсник  $i(t) = 11t - 0,1(1 - e^{-100t})$  А. Определите схему двухполюсника и параметры ее элементов.

### Решения и методические указания

**9.18р.** Метод выделения простейших составляющих позволяет реализовать реактивные двухполюсники, построенные на первой (рис. Т9.16) или второй (рис. Т9.17) каноническим схемам Фостера.

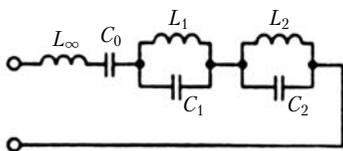


Рис. Т9.16

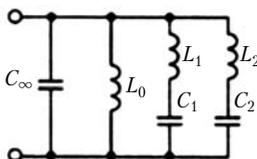


Рис. Т9.17

В некоторых задачах схемы двухполюсников получают более простыми. Если в ответе указано, что  $L_i = 0$ ,  $C_k = \infty$ , то это означает короткое замыкание соответствующих элементов. Напротив, запись  $L_i = \infty$ ,  $C_k = 0$  свидетельствует о том, что соответствующие элементы разомкнуты.

По условию,  $F(p)$  имеет смысл входного сопротивления. Поэтому отдельные составляющие  $F(p)$  соответствуют сопротивлениям последовательно включенных простейших цепей. Так, составляющая  $3p$  соответствует индуктивности 3 Гн.

Необходимо учесть, что для параллельной  $LC$ -цепи операторное входное сопротивление

$$Z(p) = \frac{1}{C} \frac{p}{p^2 + \frac{1}{LC}} \text{ Ом.}$$

С учетом этих замечаний найдем  $L_\infty = 3$  Гн;  $C_0 = 1/5$  Ф;  $L_1 = 1$  Гн;  $C_1 = 1/4$  Ф;  $L_2 = 2/3$  Гн;  $C_2 = 1/6$  Ф.

**9.19м.** Учтите, что операторная входная проводимость последовательной  $LC$ -цепи  $Y(p) = \frac{1}{L} \frac{p}{p^2 + (LC)^{-1}}$ .

**9.21р.** Заданная функция  $Z(p) = N(p)/M(p)$  обладает частотной характеристикой  $x(\omega)$  типа  $(0-x)$ , следовательно, первая каноническая схема Фостера (см. рис. Т9.16) не будет содержать элемента  $C_0$ .

Уравнение  $M(p) = 0$  имеет единственную пару ненулевых корней:  $p_{x1} = j\omega_0 = j2 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ ;  $p_{x2} = -j\omega_0 = -j2 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ . Таким образом, искомая цепь (см. рис. Т9.16) будет содержать только один параллельный  $LC$ -контур.

Таким образом, функция  $Z(p)$  может быть реализована в виде последовательного соединения индуктивного элемента и параллельной  $LC$ -цепи. Числовые значения параметров элементов найдем из разложения

$$Z(p) = \alpha_\infty p + \frac{2\alpha_1 p}{p^2 + \omega_0^2},$$

где  $\alpha_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} [pZ(p)] = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$ ;  $\omega_0^2 = 4 \cdot 10^{10} \text{ (рад/с)}^2$ ;

$$\alpha_1 = \text{Res}_{p=p_{x1}} [Z(p)] = \left[ \frac{0,5 \cdot 10^{-12} p^3 + 70 \cdot 10^{-3} p}{25 \cdot 10^{-12} p^2 + 1} \right]_{p=p_{x1}} = 10^9 \text{ Ф}^{-1}.$$

Разложению  $Z(p)$  на простейшие составляющие соответствует схема (см. рис. Т9.16), причем элементы  $L_2$ ,  $C_0$ ,  $C_2$  закорочены, т.е.  $L_2 = 0$ ;  $C_2 = C_0 = \infty$ ;  $L_\infty = \alpha_\infty = 20 \text{ мГн}$ ;  $L_1 = 2\alpha_1/\omega_0^2 = 50 \text{ мГн}$ ;  $C_1 = 1/(2\alpha_1) = 500 \text{ пФ}$ .

Построим вторую каноническую схему Фостера. Функцию

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{25 \cdot 10^{-12} p^2 + 1}{0,5 \cdot 10^{-12} p^3 + 70 \cdot 10^{-3} p} \text{ См}$$

представим в виде

$$Y(p) = \frac{\alpha'_0}{p} + \frac{2\alpha'_1 p}{p^2 + \omega_0^2},$$

где  $\alpha'_0 = \text{Res}_{p=0} [Y(p)] = \frac{100}{7} \text{ Гн}^{-1}$ .

Уравнение  $N(p) = p(0,5 \cdot 10^{-12} p^2 + 70 \cdot 10^{-3}) = 0$  имеет единственную пару комплексно-сопряженных корней:  $p_{x1} = j\omega_0 = j\sqrt{14} \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ ,  $p_{x2} = -j\omega_0 = -j\sqrt{14} \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ . В этом случае  $\alpha'_1 = \text{Res}_{p=\pm j\omega_0} [Y(p)] = 125/7 \text{ Гн}^{-1}$ . Разложению  $Y(p)$  соответствует схема, приведенная на рис. Т9.17, причем элементы  $C_\infty$ ,  $L_2$  и  $C_2$  разомкнуты, т.е.  $C_\infty = 0$ ;  $C_2 = 0$ ;  $L_2 = \infty$ ;  $L_0 = 1/\alpha'_0 = 70 \text{ мГн}$ ;  $L_1 = 1/(2\alpha'_1) = 28 \text{ мГн}$ ;  $C_1 = 2\alpha'_1/\omega_0^2 = 12 \text{ 500/49 пФ}$ .

**9.26м.** Решение задачи такого типа осуществляют в два этапа. Сначала нужно найти аналитическое выражение для операторной входной функции  $Z(p)$ , используя заданную частотную характеристику  $x(\omega)$ . Затем функцию  $Z(p)$  следует реализовать в виде входного сопротивления некоторой  $LC$ -цепи.

Судя по виду частотной характеристики  $x(\omega)$ , операторная входная функция  $Z(p)$  имеет нули  $p_{01} = 0$ ,  $p_{02} = -p_{03} = j\sqrt{2} \text{ с}^{-1}$  и полюсы  $p_{x1} = -p_{x2} = j1 \text{ с}^{-1}$ ;  $p_{x3} = -p_{x4} = j\sqrt{3} \text{ с}^{-1}$ . Задание полюсов и нулей определяет функцию  $Z(p)$  с точностью до постоянного множителя  $k$ :

$$Z(p) = k \frac{p(p^2 + 2)}{(p^2 + 1)(p^2 + 3)} = k \frac{p^3 + 2p}{p^4 + 4p^2 + 3}.$$

По условию,  $\lim_{p \rightarrow \infty} [pZ(p)] = 1$ , следовательно,  $k = 1$ . Теперь задача сводится к реализации заданной функции  $Z(p)$  методом Фостера (см. задачу 9.21р).

**9.29р.** Схемы цепей, рассмотренных в задачах 9.29р–9.36, можно представить одной обобщенной схемой (рис. Т9.18).

В случае первой канонической схемы Кауэра операторные сопротивления продольных ветвей  $Z_i(p)$  и операторные проводимости поперечных ветвей  $Y_i(p)$  имеют вид  $\alpha_i(p)$ , где  $\alpha_i$  — индуктивности продольных и емкости поперечных ветвей. Для второй ка-

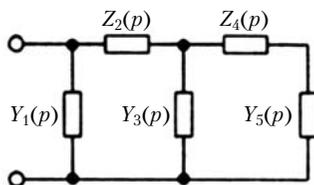


Рис. Т9.18

нонической схемы Кауэра сопротивления продольных и проводимости поперечных ветвей имеют вид  $1/(\beta_i p)$ , где  $\beta_i$  — индуктивности поперечных и емкости продольных ветвей.

В некоторых задачах цепные схемы получаются более простыми. Чтобы и в таких случаях можно было применять (см. рис. Т9.18), условимся, что запись  $Z_i = 0$ ;  $Y_k = \infty$  символизирует короткое замыкание соответствующей ветви обобщенной схемы. Напротив, запись  $Z_i = \infty$ ;  $Y_k = 0$  свидетельствует о том, что соответствующие ветви разомкнуты. Такая форма представления результатов позволяет привести их в наиболее компактном виде. Для рассматриваемой задачи

$$Y_1(p) = 0; \quad Z_2(p) = 2p; \quad Y_3(p) = 3p; \quad Z_4(p) = p; \quad Y_5(p) = 4p.$$

Таким образом, схема искомой цепи получается из схемы (см. рис. Т9.18) путем размыкания ветви  $Y_1(p)$  и замены элементов  $Z_2(p)$ ,  $Y_3(p)$ ,  $Z_4(p)$  и  $Y_5(p)$  элементами  $L_2 = 2$  Гн,  $C_3 = 3$  Ф,  $L_4 = 1$  Гн и  $C_5 = 4$  Ф.

**9.33р.** Функция  $Z(p)$  имеет частотную характеристику вида  $(0-0)$ . Для реализации первой канонической схемы Кауэра используют ту из входных функций цепи, которая имеет полюс на бесконечно большой частоте. Выбрав для реализации функцию  $Y(p) = 1/Z(p)$  и расположив полиномы в числителе и знаменателе в порядке убывания степеней  $p$ , получим следующее разложение функции  $Y(p)$  в цепную дробь:

$$Y(p) = \frac{12p^4 + 12p^2 + 1}{6p^3 + 3p} = 2p + \frac{1}{p + \frac{1}{3p + \frac{1}{2p}}} = [2p; p; 3p; 2p] \text{ См.}$$

Для реализации второй канонической схемы Кауэра применим ту из входных функций цепи, которая имеет полюс на нулевой частоте. Выбрав для реализации функцию  $Y(p) = 1/Z(p)$  и расположив полиномы в числителе и знаменателе в порядке возрастания степеней  $p$ , определим

$$Y(p) = \frac{1 + 12p^2 + 12p^4}{3p + 6p^3} = \left( \frac{1}{3p} \right) + \frac{1}{\left( \frac{3}{10p} \right) + \frac{1}{\left( \frac{1}{0,24p} \right) + \frac{1}{(1/5p)}}} =$$

$$= \left[ \left[ \frac{1}{3p} \right]; \left[ \frac{3}{10p} \right]; \left[ \frac{1}{0,24p} \right]; \left[ \frac{1}{5p} \right] \right]_{\text{См.}}$$

Параметры обобщенной схемы (см. рис. Т9.18), соответствующие двум полученным разложениям  $Y(p)$ , таковы:

- 1)  $C_1 = 2 \text{ Ф}; L_2 = 1 \text{ Гн}; C_3 = 3 \text{ Ф}; L_4 = 2 \text{ Гн}; Y_5(p) = \infty;$
- 2)  $L_1 = 3 \text{ Гн}; C_2 = 10/3 \text{ Ф}; L_3 = 0,24 \text{ Гн}; C_4 = 5 \text{ Ф}; Y_5(p) = \infty.$

**9.40м.** Последовательность решения этой задачи такая же, как и задачи 9.26м. Операторная входная функция  $Z(p)$  имеет нули  $p_{01} = 0; p_{02} = -p_{03} = j\sqrt{2} c^{-1}$  и полюсы  $p_{x1} = -p_{x2} = j\frac{1}{\sqrt{5}} c^{-1}$ . Следовательно,  $Z(p) = k \frac{p(p^2 + 1/2)}{p^2 + 1/5}$  Ом. Постоянный множитель  $k$  найдем из условия, что  $\lim_{p \rightarrow \infty} [pZ(p)] = 1,2$ .

Таким образом,  $k = 1,2$  и  $Z(p) = \frac{6p^3 + 3p}{5p^2 + 1}$  Ом.

Теперь можно определить обе канонические реализации этой входной функции по Кауэру.

**9.43р.** По заданным функциям  $i(t)$  и  $u(t)$  найдем их изображения по Лапласу  $I(p)$  и  $U(p)$ , а затем — операторную входную функцию  $Z(p)$ :

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)} = \frac{500p + 10^5}{p + 100} \text{ Ом.}$$

Задача реализации этой функции, как и всякая задача синтеза, неоднозначна. Представим, например, функцию  $Z(p)$  в виде суммы  $Z(p) = \frac{500p}{p + 100} + \frac{10^5}{p + 100}$  Ом и каждому слагаемому этой суммы поставим в соответствие элементарную цепь. Два последовательно включенных двухполюсника  $Z_1$  и  $Z_2$ , состоящие из параллельно включенных эле-

ментов  $R_1$  и  $L$ ,  $R_2$  и  $C$ , имеют следующие операторные входные функции:

$$Z_1(p) = \frac{pR_1}{p + \frac{R_1}{L}}; \quad Z_2(p) = \frac{1}{C} \frac{1}{p + \frac{1}{R_2C}}.$$

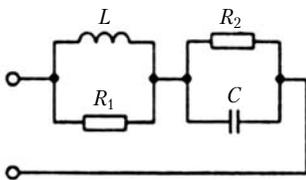


Рис. Т9.19

Следовательно, найденная функция  $Z(p)$  соответствует двухполюснику, схема которого изображена на рис. Т9.19, при  $L = 5$  Гн;  $R_1 = 500$  Ом;  $C = 10$  мкФ;  $R_2 = 1$  кОм.

**9.44м.** Как и предыдущая, эта задача имеет несколько решений. Выясните, выполняются ли условия задачи для двухполюсника (см. рис. Т9.19).

### 9.3. Основы синтеза линейных пассивных четырехполюсников

**9.45м.** На основании анализа полюсно-нулевых диаграмм для операторных коэффициентов передачи четырехполюсников по напряжению (рис. Т9.20,  $a - z$ ) постройте качественно АЧХ и ФЧХ четырехполюсников.

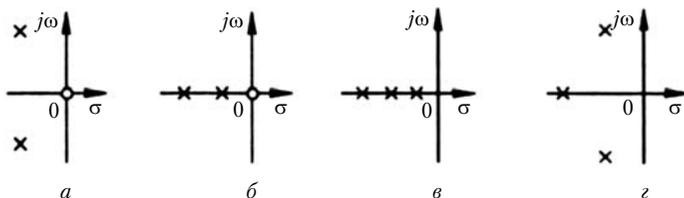


Рис. Т9.20

**9.46.** Полюсно-нулевая диаграмма операторного коэффициента передачи четырехполюсника по напряжению симметрична относительно оси  $j\omega$ : каждому полюсу в левой полуплоскости соответствует нуль в правой полуплоскости, являющийся отражением этого полюса. Покажите, что четырехполюсник является всепропускающим, т.е. его АЧХ постоянна на всех частотах.

**9.47.** Операторный коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению  $K(p) = (p^2 - p + 1)(p^2 + p + 1)^{-1}$ . Является ли этот четырехполюсник минимально-фазовым? Постройте АЧХ четырехполюсника.

**9.48.** Даны два четырехполюсника с операторными коэффициентами передачи по напряжению

$$K_1(p) = \frac{p^2 + a_1p + a_0}{p^2 + b_1p + b_0}; \quad K_2(p) = \frac{p^2 - a_1p + a_0}{p^2 + b_1p + b_0},$$

где  $a_i, b_i > 0$ . С помощью полюсно-нулевых диаграмм покажите, что АЧХ четырехполюсников идентичны. Какой из двух четырехполюсников является неминимально-фазовым?

**9.49м.** Покажите, что при произвольной нагрузке полюсы операторного коэффициента передачи четырехполюсника по напряжению  $K(p)$  совпадают с нулями операторного входного сопротивления  $Z_{\text{вх}}(p)$ .

**9.50.** Убедитесь, что операторные коэффициенты передачи по напряжению четырехполюсников, состоящих только из реактивных элементов (рис. Т9.21,  $a - z$ ), представляют собой отношение полиномов четных степеней комплексной переменной  $p$ .

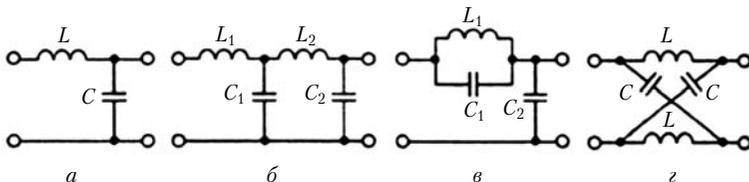


Рис. Т9.21

**9.51р.** Постройте П-образный четырехполюсник, Y-параметры которого определяются следующими выражениями:

$$Y_{11}(p) = \frac{4p^3 + 3p}{2p^2 + 1} \text{ См}; \quad Y_{12}(p) = Y_{21}(p) = \frac{-p}{2p^2 + 1} \text{ См};$$

$$Y_{22}(p) = \frac{6p^3 + 4p}{2p^2 + 1} \text{ См}.$$

**9.52.** Найдите одну из реализаций П-образного четырехполюсника, соответствующую заданным первичным параметрам:

$$Y_{11}(p) = \frac{24p^2 + 13p + 1}{6p + 1} \text{ См}; \quad Y_{12}(p) = Y_{21}(p) = \frac{-3p}{6p + 1} \text{ См};$$

$$Y_{22}(p) = \frac{36p^2 + 21p + 1}{18p + 3} \text{ См}.$$

**9.53р.** Синтезируйте Т-образный четырехполюсник, Z-параметры которого определяются следующими выражениями:

$$Z_{11}(p) = \frac{36p^4 + 16p^2 + 1}{12p^3 + 2p} \text{ Ом}; \quad Z_{12}(p) = Z_{21}(p) = \frac{12p^4 + 12p^2 + 1}{12p^3 + 2p} \text{ Ом};$$

$$Z_{22}(p) = \frac{12p^4 + 15p^2 + 1,5}{12p^3 + 2p} \text{ Ом}.$$

**9.54р.** Коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению в режиме холостого хода на выходе  $K(p) = \frac{2p^2 - 1}{6p^2 + 1}$ .

Реализуйте  $K(p)$  с помощью симметричной мостовой цепи.

**9.55.** Возможно ли реализовать функцию, приведенную в предыдущей задаче, с помощью Г-образной цепи?

**9.56.** Определите параметры симметричной мостовой цепи по заданному коэффициенту передачи по напряжению в режиме холостого хода на выходе  $K(p) = \frac{6p^2 + 1}{10p^2 + 1}$ .

**9.57р.** Реализуйте функцию, приведенную в предыдущей задаче, с помощью Г-образной цепи.

**9.58р.** Постройте симметричный мостовой четырехполюсник, у которого операторный коэффициент передачи по напряжению при согласованной нагрузке  $Z_{\text{н}} = 0,5 \text{ Ом}$  определяется выражением  $K(p) = \frac{24p + 1}{24p + 1}$ .

**9.59м.** Поперечная ветвь Г-образного четырехполюсника состоит из сопротивления  $R = 1 \text{ кОм}$  (рис. Т9.22). Состав продольной ветви четырехполюсника неизвестен. При нулевых начальных условиях четырехполюсник подключают к источнику ЭДС  $e(t) = 10 \cdot 1(t) \text{ В}$ . При этом напряжение на выходе  $u_2(t) = 5(1 - e^{-100t}) \text{ В}$ . Составьте схему продольной ветви  $Z$  и определите параметры входящих в нее элементов.

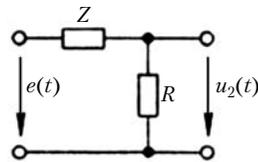


Рис. Т9.22

**9.60.** Решите задачу 9.59м для  $e(t) = 10 \cdot 1(t) \text{ В}$ ;  $u_2(t) = 2 + 8e^{-100t} \text{ В}$ .

### Решения и методические указания

**9.45м.** Для качественного построения АЧХ и ФЧХ четырехполюсника по его полюсно-нулевой диаграмме необходимо выполнить следующее:

1) нанести на положительной мнимой полуоси точку  $j\omega$ , соответствующую определенному значению угловой частоты  $\omega$ ;

2) из каждого нуля  $p_{0i}$  и каждого полюса  $p_{xi}$  направить в точку  $j\omega$  векторы  $j\omega - p_{0i}$  и  $j\omega - p_{xi}$ ;

3) определить модуль (длину) каждого из векторов  $j\omega - p_{0i}$  и  $j\omega - p_{xi}$  и его аргумент (угол с положительной вещественной полуосью);

4) найти значение модуля комплексной частотной характеристики  $H(\omega)$  на частоте  $\omega$ , которое с точностью до постоянного множителя  $k$  будет равно произведению длин всех векторов  $j\omega - p_{0i}$ , проведенных из нулей  $p_{0i}$  в точку  $j\omega$ , деленному на произведение длин всех векторов, проведенных в точку  $j\omega$  из полюсов  $p_{xi}$ ;

5) рассчитать значение аргумента комплексной частотной характеристики  $\psi(\omega)$  на частоте  $\omega$ , равное алгебраической сумме аргументов всех векторов, проведенных из нулей и полюсов в точку  $j\omega$ , причем аргументы векторов  $j\omega - p_{0i}$  берутся со знаком «плюс», а аргументы векторов  $j\omega - p_{xi}$  — со знаком «минус»;

6) повторить пункты 1–5 для других значений угловой частоты  $\omega$  и по найденным значениям  $H(\omega)$  и  $\psi(\omega)$  построить АЧХ (зависимость  $H(\omega)$ ) и ФЧХ (зависимость  $\psi(\omega)$ ) рассматриваемого четырехполюсника.

**9.49.м** Для доказательства необходимо найти выражения для  $K(p)$  и  $Z_{\text{вх}}(p)$  и убедиться, что полином, стоящий в знаменателе выражения для  $K(p)$ , с точностью до постоянного множителя совпадает с полиномом, стоящим в числителе  $Z_{\text{вх}}(p)$ .

**9.51р.** Элементы П-образной цепи (рис. Т9.23, а) связаны с Y-параметрами следующими соотношениями:

$$Z_{1\Pi}(p) = \frac{-1}{Y_{12}(p)}; \quad Z_{2\Pi}(p) = \frac{1}{Y_{11}(p) + Y_{12}(p)}; \quad Z_{3\Pi}(p) = \frac{1}{Y_{22}(p) + Y_{12}(p)}.$$

При заданных выражениях для Y-параметров

$$Z_{1\Pi}(p) = 2p + 1/p; \quad Z_{2\Pi}(p) = 1/(2p);$$

$$Z_{3\Pi}(p) = 1/(3p).$$

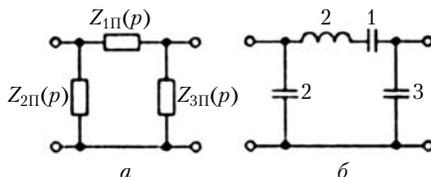


Рис. Т9.23

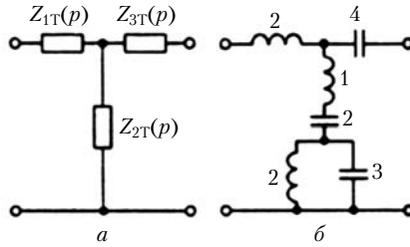


Рис. Т9.24

Функции  $Z_{1П}(p)$ ,  $Z_{2П}(p)$  и  $Z_{3П}(p)$  являются физически реализуемыми. Полная схема синтезированного четырехполюсника приведена на рис. Т9.23, б<sup>1</sup>.

**9.53р.** Элементы Т-образной цепи (рис. Т9.24, а) связаны с Z-параметрами соотношениями  $Z_{1Т}(p) = Z_{11}(p) - Z_{12}(p)$ ;  $Z_{2Т}(p) = Z_{12}(p)$ ;  $Z_{3Т}(p) = Z_{22}(p) - Z_{12}(p)$ . Для заданных Z-параметров  $Z_{1Т}(p) = 2p$ ;  $Z_{3Т}(p) = 1/(4p)$ ;  $Z_{2Т}(p) = \frac{12p^4 + 12p^2 + 1}{12p^3 + 2p}$ . Для реализации сопротивления  $Z_{2Т}(p)$  используем первую каноническую схему Фостера. В результате получим

$$Z_{2Т}(p) = p + \frac{1}{2p} + \frac{p}{3(p^2 + 1/6)}.$$

Полная схема синтезированного четырехполюсника, имеющего заданные Z-параметры, приведена на рис. Т9.24, б.

**9.54р.** Операторный коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению в режиме холостого хода на выходе  $K(p) = \frac{Z_{21}(p)}{Z_{11}(p)}$ . Для реализации функции  $K(p)$  выбрана симметричная мостовая цепь (рис. Т9.25), для которой  $Z_{11}(p) = \frac{[Z_2(p) + Z_1(p)]}{2}$ ;  $Z_{21}(p) = [Z_2(p) - Z_1(p)]/2$ . Представим заданную функцию  $K(p)$  в виде

$$K(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{[M(p) + N(p)] - [M(p) - N(p)]}{[M(p) + N(p)] + [M(p) - N(p)]},$$

где  $N(p) = 2p^2 - 1$ ,  $M(p) = 6p^2 + 1$  — известные полиномы  $p$ .

Введем полином  $Q(p)$  такой, чтобы отношения полиномов

$$\frac{M(p) - N(p)}{Q(p)} = Z_1(p); \quad \frac{M(p) + N(p)}{Q(p)} = Z_2(p)$$

<sup>1</sup> На рис. Т9.23 и Т9.24 значения индуктивности приведены в генри, а емкости — в фарадах.

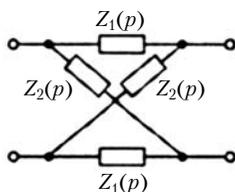


Рис. Т9.25

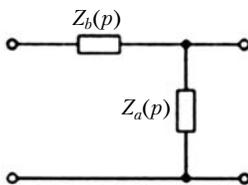


Рис. Т9.26

представляли собой положительные вещественные функции. Пусть  $Q(p) = ap$  ( $a$  — некоторая положительная константа). Тогда  $Z_1(p) = \frac{4}{a}p + \frac{2}{a} \frac{1}{p}$  (Ом);  $Z_2(p) = \frac{8}{a}p$  (Ом). Таким образом, сопротивление  $Z_1(p)$  образовано последовательно соединенными индуктивностью  $L_1 = 4/a$  (Гн) и емкостью  $C_1 = a/2$  (Ф), а  $Z_2(p)$  состоит из индуктивности  $L_2 = 8/a$  (Гн).

Несложно проверить, что заданная функция  $K(p)$  обеспечивается при любом  $a > 0$ , поэтому при выборе  $a$  следует учитывать конструктивные, экономические и другие показатели реализуемой цепи.

**9.57р.** Операторный коэффициент передачи  $\Gamma$ -образного четырехполюсника (рис. Т9.26) по напряжению

$$K(p) = \frac{Z_a(p)}{Z_b(p) + Z_a(p)} = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{6p^2 + 1}{10p^2 + 1},$$

где  $N(p)$  и  $M(p)$  — полиномы комплексной переменной  $p$ .

Введем полином  $Q(p)$  такой, чтобы  $Z_a(p)$  и  $Z_b(p)$  представляли собой положительные вещественные функции:

$$\frac{N(p)}{Q(p)} = Z_a(p); \quad \frac{M(p) - N(p)}{Q(p)} = Z_b(p).$$

Пусть  $Q(p) = ap$ , где  $a > 0$ . Тогда

$$Z_a(p) = \frac{6p^2 + 1}{ap} = \frac{6}{a}p + \frac{1}{ap}; \quad Z_b(p) = \frac{(10p^2 + 1) - (6p^2 + 1)}{ap} = \frac{4}{a}p.$$

Таким образом, сопротивление  $Z_a(p)$  образовано последовательным соединением индуктивности  $L_a = 6/a$  (Гн) и емкости  $C_a = a$  (Ф), а  $Z_b(p)$  состоит из индуктивности  $L_b = 4/a$  (Гн). Нетрудно убедиться, что заданная функция  $K(p)$  обеспечивается при любом  $a > 0$ .

**9.58р.** Характеристическое сопротивление симметричного четырехполюсника и его операторный коэффициент

передачи по напряжению при произвольной нагрузке определяются следующими соотношениями:

$$Z_c(p) = \sqrt{A_{12}(p)/A_{21}(p)}; \quad K(p) = [A_{11}(p) + A_{12}(p)/Z_n(p)]^{-1}.$$

Используя полученные в задаче 7.19 выражения для  $A$ -параметров симметричного мостового четырехполюсника

$$A_{11}(p) = A_{22}(p) = \frac{Z_2(p) + Z_1(p)}{Z_2(p) - Z_1(p)}; \quad A_{12}(p) = \frac{2Z_1(p)Z_2(p)}{Z_2(p) - Z_1(p)};$$

$$A_{21}(p) = \frac{2}{Z_2(p) - Z_1(p)}$$

и учитывая, что  $Z_n(p) = Z_c(p)$ , найдем

$$K(p) = \frac{\sqrt{Z_2(p)} - \sqrt{Z_1(p)}}{\sqrt{Z_2(p)} + \sqrt{Z_1(p)}}; \quad Z_n(p) = \sqrt{Z_1(p)Z_2(p)}.$$

Разрешив полученные соотношения относительно  $Z_1(p)$  и  $Z_2(p)$ , находим

$$Z_1(p) = \frac{1 - K(p)}{1 + K(p)} Z_n(p) = \frac{3}{8(6p + 1)} \text{ Ом};$$

$$Z_2(p) = \frac{1 + K(p)}{1 - K(p)} Z_n(p) = 4p + \frac{2}{3} \text{ Ом}.$$

Очевидно, что ветвь  $Z_1(p)$  образована параллельным соединением емкости  $C_1 = 16 \text{ Ф}$  и сопротивления  $R_1 = 3/8 \text{ Ом}$ , а ветвь  $Z_2(p)$  — последовательным соединением индуктивности  $L_2 = 4 \text{ Гн}$  и сопротивления  $R_2 = 2/3 \text{ Ом}$ .

**9.59м.** Перейдите к изображениям по Лапласу входного и выходного напряжений и определите операторный коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению  $K(p)$ . После нахождения операторного сопротивления  $Z(p)$  по известным  $R$  и  $K(p)$  произведите его реализацию.

# Глава 10

## МЕТОДЫ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ

### 10.1. Компонентные и топологические матрицы электрической цепи<sup>1</sup>

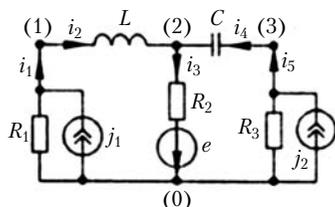


Рис. Т10.1

**10.1р.** Составьте полную и сокращенную матрицы узлов электрической цепи, схема которой приведена на рис. Т10.1. Найдите матрицы главных контуров и главных сечений данной цепи, выбрав ветви 1, 3, 5 в качестве ветвей дерева.

**10.2.** Составьте матрицы узлов для цепей, изображенных на рис. Т10.2, *a* – *e*.

**10.3м.** Постройте граф цепи по заданной матрице узлов **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**10.4.** Составьте матрицы узлов, главных контуров и главных сечений графа, изображенного на рис. Т1.21.

**10.5.** Найдите матрицы главных контуров и главных сечений цепи, изображенной на рис. Т10.3, выбрав ветви 4 и 5 в качестве ветвей дерева.

**10.6м.** Составьте матрицы основных контуров  $\mathbf{B}^0$  цепей (см. рис. Т10.2, *e* и Т10.3).

<sup>1</sup> Во всех задачах п. 10.2 и 10.3 предполагается использование одного из вариантов расширенного топологического описания, часто применяемого в программах автоматизированного анализа цепей, при котором идеализированный активный двухполюсник, содержащий источник напряжения или тока и соответствующее внутреннее сопротивление, рассматривается в качестве одной ветви.

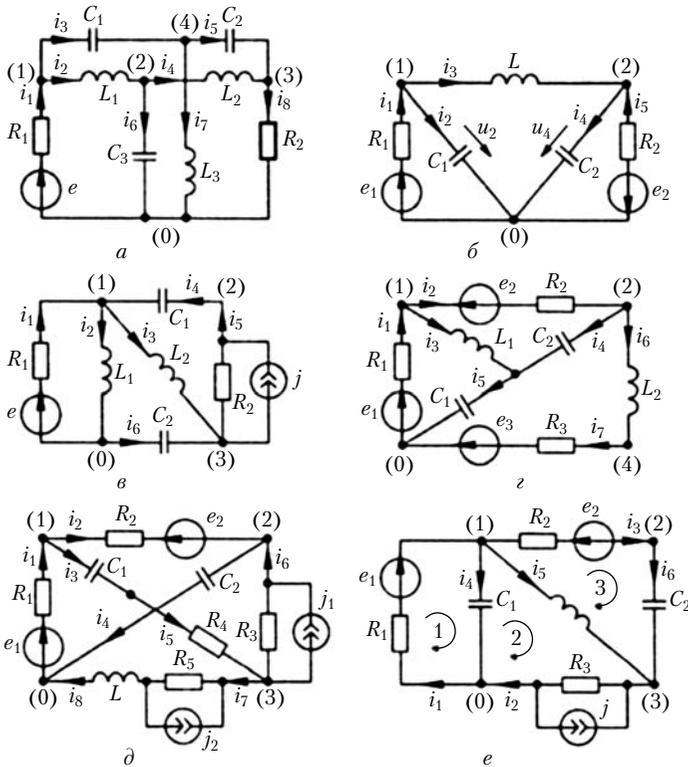


Рис. Т10.2

**10.7р.** Составьте компонентные уравнения в форме  $Y$  для цепи, схема которой изображена на рис. Т10.1.

**10.8р.** Составьте компонентные уравнения в форме  $Z$  для цепи, представленной на рис. Т10.1.

**10.9.** Составьте матричные компонентные уравнения в формах  $Y$  и  $Z$  для цепей, схемы которых приведены на рис. Т10.2, *a, в*.

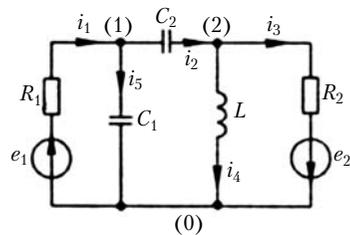


Рис. Т10.3

### Решения и методические указания

**10.1.** Граф цепи, соответствующий принятому в данном параграфе топологическому описанию, приведен на рис. Т10.4 (главные ветви графа изображены пунктиром).

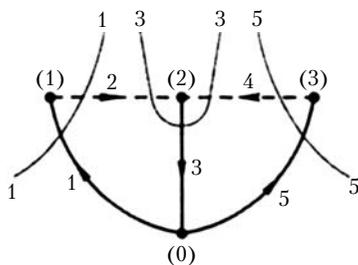


Рис. Т10.4

Число столбцов полной матрицы узлов  $A_c$  данного графа равно общему числу ветвей  $p = 5$ , номера столбцов совпадают с номерами соответствующих ветвей. Число строк матрицы равно общему числу узлов  $q = 4$ , их номера совпадают с номерами соответствующих узлов, причем строка

с номером 0 располагается последней:

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Элемент  $a_{ij}$ , стоящий на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, равен единице, если ветвь  $j$  инцидентна узлу  $i$  и направлена от этого узла;  $a_{ij} = -1$ , если ветвь  $j$  инцидентна узлу  $i$  и направлена к этому узлу;  $a_{ij} = 0$ , если ветвь  $j$  не инцидентна узлу  $i$ .

Сокращенная матрица узлов  $A$  получается из полной путем отбрасывания любой строки (как правило, отбрасывается строка, стоящая последней):

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрица главных контуров  $B$  графа рассматриваемой цепи, соответствующая выбранному дереву, содержит  $p = 5$  столбцов и  $n = p - q + 1 = 2$  строки, причем номера строк совпадают с номерами соответствующих им главных контуров (будем нумеровать главные контуры в порядке возрастания номеров входящих в них главных ветвей):

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Элемент  $b_{ij}$ , расположенный на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, равен единице, если  $j$ -я ветвь входит в  $i$ -й главный контур и направление ветви совпадает с направлением обхода контура;  $b_{ij} = -1$ , если ветвь  $j$  входит в контур  $i$ , а ее направление противоположно направлению обхода контура;  $b_{ij} = 0$ , если ветвь  $j$  не входит в контур  $i$ .

Матрица главных сечений  $\mathbf{Q}$  рассматриваемого графа содержит  $p = 5$  столбцов, номера которых совпадают с номерами соответствующих ветвей, и  $m = q - 1 = 3$  строки, номера которых соответствуют номерам главных сечений (будем нумеровать главные сечения в порядке возрастания номеров входящих в них ветвей дерева):

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Элемент  $q_{ij}$ , стоящий на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, равен единице, если ветвь  $j$  входит в главное сечение  $i$  и ее направление относительно линии сечения совпадает с направлением соответствующей ветви дерева;  $q_{ij} = -1$ , если ветвь  $j$  входит в главное сечение  $i$ , а ее направление противоположно направлению соответствующей ветви дерева;  $q_{ij} = 0$ , если ветвь  $j$  не входит в главное сечение  $i$ .

**10.3м.** Отыскание графа упрощается, если от сокращенной матрицы узлов  $\mathbf{A}$  перейти к полной матрице узлов  $\mathbf{A}_c$ .

**10.6м.** Основными контурами планарной (плоской) цепи называют контуры, образованные ячейками графа цепи (на рис. Т10.2,  $e$  показаны стрелками). Направление обхода всех контуров удобно выбирать одинаковым (например, по часовой стрелке).

**10.7р.** Компонентные уравнения в форме  $Y$  для ветвей, содержащих элементы  $R$ ,  $C$ ,  $L$ , идеальный источник напряжения  $e$  с внутренним сопротивлением  $R_i$  и идеальный источник тока  $j$  с внутренним сопротивлением  $R_i$ , имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} i &= 0 + \frac{1}{R}(u - 0); & i &= i(0) + \frac{1}{sL}(u - 0); \\ i &= 0 + sC(u - 0); & i &= 0 + \frac{1}{R_i}(u + e); \\ i &= j + \frac{1}{R_i}(u - 0). \end{aligned}$$

Используя эти соотношения, составим компонентные уравнения для каждой из ветвей цепи, схема которой изображена на рис. Т10.1:

$$\begin{aligned} i_1 &= j_1 + \frac{1}{R_1}(u_1 - 0); & i_3 &= 0 + \frac{1}{R_2}(u_3 + e); \\ i_2 &= i_2(0) + \frac{1}{sL}(u_2 - 0); & i_4 &= 0 + sC(u_4 - 0); & i_5 &= j_2 + \frac{1}{R_3}(u_5 - 0). \end{aligned}$$

Объединив эти уравнения в одно, получим матричное компонентное уравнение цепи в форме  $Y$ :

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_g + \mathbf{Y}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_g),$$

где

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_g = \begin{bmatrix} j_1 \\ i_2(0) \\ 0 \\ 0 \\ j_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица проводимостей ветвей  $\mathbf{Y}$  — квадратная, диагональная, элементы ее главной диагонали представляют собой проводимости ветвей:

$$\text{diag } \mathbf{Y} = [R_1^{-1}; (sL)^{-1}; R_2^{-1}; sC; R_3^{-1}].$$

Анализируя структуру полученного компонентного уравнения цепи, можно сформулировать простые правила, позволяющие записать матричное компонентное уравнение цепи непосредственно по виду схемы цепи, т.е. минуя этап составления системы скалярных уравнений:

- матрицы-столбцы (векторы)  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{u}$  содержат токи и напряжения ветвей; число элементов в них равно общему числу ветвей;

- вектор  $\mathbf{u}_g$  учитывает наличие в ветвях источников напряжения, причем ЭДС каждого такого источника записывается со знаком «минус», если положительные направления ЭДС и тока ветви совпадают, и со знаком «плюс» — в противоположном случае;

- в векторе  $\mathbf{i}_g$  от нуля отличаются только элементы, относящиеся к индуктивным ветвям и к ветвям с источниками тока — эти элементы равны соответственно начальным значениям токов индуктивных элементов и токам источников тока;

- число элементов в каждом из векторов  $\mathbf{u}_g$  и  $\mathbf{i}_g$  равно числу ветвей;

- матрица проводимостей  $\mathbf{Y}$  — квадратная, отличными от нуля в ней являются лишь элементы главной диагонали, которые представляют собой проводимости ветвей рассматриваемой цепи.

**10.8р.** Компонентные уравнения в форме  $Z$  для ветвей, содержащих элементы  $R$ ,  $C$ ,  $L$ , идеальный источник напряжения  $e$  с внутренним сопротивлением  $R_i$  и идеальный источник тока  $j$  с внутренним сопротивлением  $R_i$ , имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u &= 0 + R(i - 0); \\ u &= u(0) + \frac{1}{sC}(i - 0); \\ u &= 0 + sL(i - 0); \\ u &= -e + R_i(i - 0); \\ u &= 0 + R_i(i - j). \end{aligned}$$

Используя эти соотношения, составим компонентное уравнение для каждой из ветвей рассматриваемой цепи:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 + R_1(i_1 - j_1); \quad u_3 = -e + R_2(i_3 - 0); \\ u_2 &= 0 + sL(i_2 - 0); \quad u_4 = u_4(0) + \frac{1}{sC}(i_4 - 0); \\ u_5 &= 0 + R_3(i_5 - j_2). \end{aligned}$$

Объединив эти уравнения в одно, получим матричное компонентное уравнение цепи в форме  $Z$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_v + \mathbf{Z}(\mathbf{i} - \mathbf{i}_v),$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e \\ u_4(0) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_v = \begin{bmatrix} j_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j_2 \end{bmatrix}.$$

Матрица сопротивлений ветвей  $\mathbf{Z}$  — квадратная, диагональная, элементы ее главной диагонали равны сопротивлениям ветвей рассматриваемой цепи:

$$\text{diag } \mathbf{Z} = [R_1; sL; R_2; (sC)^{-1}; R_3].$$

Как и в случае матричного компонентного уравнения в форме  $Y$  (см. решение задачи 10.7р), матричное компонентное уравнение в форме  $Z$  можно записать для любой цепи сразу, минуя этап получения системы скалярных компонентных уравнений.

Матрицы-столбцы (векторы)  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{u}$  содержат токи и напряжения ветвей; число элементов в них равно числу ветвей. Вектор  $\mathbf{u}_v$  учитывает начальные значения напряжений емкостных ветвей, а также наличие в ветвях источников напряжения. ЭДС каждого такого источника записывается со знаком «минус», если положительные направления ЭДС и тока ветви совпадают. Вектор  $\mathbf{i}_v$  учитывает наличие ветвей с источником тока. Если  $n$ -я ветвь цепи представляет собой

источник тока  $j$  с внутренним сопротивлением  $R_j$ , то  $n$ -й элемент вектора  $\mathbf{i}_v$  равен  $j$ . Число элементов в векторах  $\mathbf{u}_v$  и  $\mathbf{i}_v$  равно числу ветвей рассматриваемой цепи.

## 10.2. Методы узловых напряжений и контурных токов

**10.10р.** Постройте вектор (матрицу-столбец) узловых токов для цепи, схема которой показана на рис. Т10.1, двумя методами: 1) путем операций над топологическими и компонентными матрицами; 2) непосредственно по схеме цепи.

**10.11р.** Найдите матрицу узловых проводимостей  $\mathbf{Y}_{(ij)}$  цепи, рассмотренной в задаче 10.10р, двумя методами: 1) путем операций над матрицами проводимостей  $\mathbf{Y}$  и узлов  $\mathbf{A}$ ; 2) непосредственно по схеме цепи.

**10.12.** Используя результаты решения задач 10.10р и 10.11р, запишите систему узловых уравнений цепи, схема которой изображена на рис. Т10.1, в матричной и скалярной формах.

**10.13.** Составьте систему узловых уравнений цепи, изображенной на рис. Т10.2, *в*, двумя методами: 1) путем операций над компонентными и топологическими матрицами; 2) непосредственно по схеме.

**10.14.** Составьте узловые уравнения относительно изображений по Лапласу токов и напряжений для цепи, приведенной на рис. Т10.2, *в*. Начальные условия ненулевые. Сравните результат с решением задачи 10.13.

**10.15.** Цепь (см. рис. Т10.2, *в*) находится в установившемся режиме при гармоническом внешнем воздействии частоты  $\omega$ . Используя результаты решения задач 10.13 и 10.14, запишите узловые уравнения цепи относительно комплексных действующих значений напряжений и токов.

**10.16р.** Постройте вектор контурных ЭДС  $e_{ij}$  для цепи, изображенной на рис. Т10.3, двумя методами: 1) путем операций над топологическими и компонентными матрицами; 2) непосредственно по схеме цепи. В качестве ветвей дерева возьмите ветви 4 и 5.

**10.17р.** Найдите матрицу контурных сопротивлений  $\mathbf{Z}_{(ij)}$  цепи, рассмотренной в задаче 10.16р, двумя методами: 1) путем операций над матрицами сопротивлений  $\mathbf{Z}$  и главных контуров  $\mathbf{B}$ ; 2) непосредственно по схеме цепи.

**10.18.** Используя результаты решения задач 10.16р и 10.17р, составьте систему контурных уравнений для цепи, изображенной на рис. Т10.3, в матричной и скалярной формах.

**10.19.** Составьте систему контурных уравнений для цепи, схема которой приведена на рис. Т10.2, *e*, двумя методами: 1) путем операций над топологическими и компонентными матрицами; 2) непосредственно по схеме цепи. В качестве ветвей дерева возьмите ветви 3–5.

**10.20.** Составьте систему контурных уравнений относительно изображений по Лапласу токов и напряжений для цепи, рассмотренной в задаче 10.19. Начальные условия нулевые. Сравните результат с решением задачи 10.19.

**10.21.** Цепь (см. рис. Т10.2, *e*) находится в установившемся режиме при гармоническом внешнем воздействии частоты  $\omega$ . Используя результаты решений задач 10.19 и 10.20, запишите контурные уравнения цепи относительно комплексных действующих значений напряжений и токов.

**10.22м.** Составьте контурные уравнения цепи, схема которой изображена на рис. Т10.1. В качестве ветвей дерева возьмите ветви 1, 3, 5.

### Решения и методические указания

**10.10р.** Вектор узловых токов  $\mathbf{j}_{i0}$  содержит в данном случае три элемента (по числу независимых узлов) и определяется выражением

$$\mathbf{j}_{i0} = \mathbf{A}\{\mathbf{Y}\mathbf{u}_g - \mathbf{i}_g\},$$

где  $\mathbf{A}$  — матрица узлов;  $\mathbf{Y}$  — матрица проводимостей ветвей;  $\mathbf{i}_g$ ,  $\mathbf{u}_g$  — векторы задающих токов и напряжений. Перечисленные матрицы рассматриваемой цепи были определены ранее при решении задач 10.1р и 10.7р. Подставив  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{i}_g$  и  $\mathbf{u}_g$  в выражение для  $\mathbf{j}_{i0}$ , найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{i0} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (sL)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sC & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_3^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j_1 \\ i_2(0) \\ 0 \\ 0 \\ j_2 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j_1 \\ -i_2(0) \\ -R_2^{-1}e \\ 0 \\ -j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 - i_2(0) \\ i_2(0) - R_2^{-1}e \\ j_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Каждый элемент вектора  $\mathbf{j}_{i0}$  соответствует определенному независимому узлу цепи; его значение равно алгебраиче-

ской сумме тока источника тока и начального тока индуктивной ветви, инцидентных этому узлу. Если некоторому узлу инцидентна ветвь с источником напряжения  $(e_i, R_i)$ , то ее влияние учитывается с помощью члена  $e_i R_i^{-1}$ , что эквивалентно преобразованию источника напряжения в источник тока.

**10.11р.** Матрица узловых проводимостей  $\mathbf{Y}_{(ij)}$  рассматриваемой цепи имеет размеры  $3 \times 3$  (число независимых узлов равно трем) и определяется выражением (10.29):  $\mathbf{Y}_{(i,j)} = \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^t$ .

Матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{Y}$  были найдены ранее при решении задач 10.1р и 10.7р. После выполнения требуемых действий над матрицами находим элементы искомой матрицы:

$$Y_{(11)} = R_1^{-1} + (sL)^{-1}; \quad Y_{(22)} = (sL)^{-1} + R_2^{-1} + sC; \quad Y_{(33)} = sC + R_3^{-1}; \\ Y_{(12)} = Y_{(21)} = -(sL)^{-1}; \quad Y_{(13)} = Y_{(31)} = 0; \quad Y_{(23)} = Y_{(32)} = -sC.$$

**10.16р.** Вектор контурных ЭДС рассматриваемой цепи  $\mathbf{e}_{ii}$  содержит три элемента (по числу независимых контуров) и определяется выражением

$$\mathbf{e}_{ii} = \mathbf{B}(\mathbf{Z}\mathbf{i}_v - \mathbf{u}_v),$$

где  $\mathbf{B}$  — матрица главных контуров;  $\mathbf{Z}$  — матрица сопротивлений ветвей;  $\mathbf{i}_v$ ,  $\mathbf{u}_v$  — векторы задающих токов и напряжений.

Для рассматриваемой цепи

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

При этом матрица  $\mathbf{Z}$  — квадратная, диагональная,

$$\text{diag } \mathbf{Z} = [R_1; (sC_2)^{-1}; R_2; sL; (sC)^{-1}],$$

векторы  $\mathbf{i}_v$  и  $\mathbf{u}_v$  имеют вид (см. решение задачи 10.8р)

$$\mathbf{i}_v = \mathbf{0}; \quad \mathbf{u}_v = [-e_1; u_2(0); -e_2; 0; u_5(0)]^t.$$

После выполнения указанных операций над матрицами получим

$$\mathbf{e}_{ii} = [e_1 - u_5(0); u_5(0) - u_2(0); e_2]^t.$$

Каждый элемент этого вектора соответствует определенному независимому контуру цепи, его значение равно алгебраической сумме ЭДС источников напряжения и начальных напряжений емкостных ветвей, входящих в этот контур.

**10.17р.** Матрица контурных сопротивлений  $\mathbf{Z}_{(ij)}$  имеет размеры  $3 \times 3$  (число независимых контуров равно трем) и определяется выражением  $\mathbf{Z}_{(ij)} = \mathbf{BZB}^t$ . Матрицы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{Z}$  рассматриваемой цепи определены при решении задачи 10.16р.

Выполнив необходимые действия над матрицами, найдем элементы искомой матрицы:

$$Z_{(11)} = R_1 + (sC_1)^{-1}; \quad Z_{(22)} = (sC_1)^{-1} + (sC_2)^{-1} + sL; \quad Z_{(33)} = sL + R_2;$$

$$Z_{(12)} = Z_{(21)} = -(sC_1)^{-1}; \quad Z_{(13)} = Z_{(31)} = 0; \quad Z_{(23)} = Z_{(32)} = -sL.$$

**10.22м.** Топологические матрицы рассматриваемой цепи, соответствующие заданному дереву, найдены при решении задачи 10.1р; компонентные матрицы этой цепи получены при решении задачи 10.8р.

### 10.3. Метод переменных состояния<sup>1</sup>

**10.23.** Постройте собственные деревья графа цепи, схема которой приведена на рис. Т10.5, а. Составьте матрицу сечений — хорд, соответствующую одному из собственных деревьев.

**10.24.** Решите задачу 10.23р для цепи (рис. Т10.5, б).

**10.25р.** Постройте нормальные деревья графа цепи, представленной на рис. Т10.6.

**10.26.** Решите задачу 10.25р для цепи, изображенной на рис. Т10.7.

**10.27м.** Составьте матрицы сечений-хорд для цепей, схемы которых приведены на рис. Т10.6 и Т10.7.

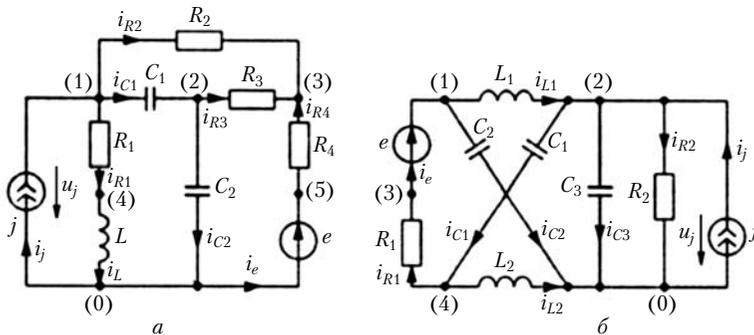


Рис. Т10.5

<sup>1</sup> Во всех задачах п. 10.3 используется расширенное топологическое описание цепи, при котором каждый элемент цепи, в том числе идеальный источник тока или напряжения, рассматривается в качестве отдельной ветви.

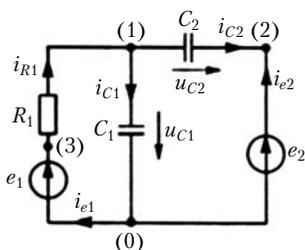


Рис. Т10.6

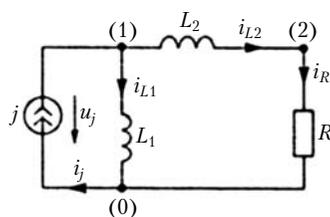


Рис. Т10.7

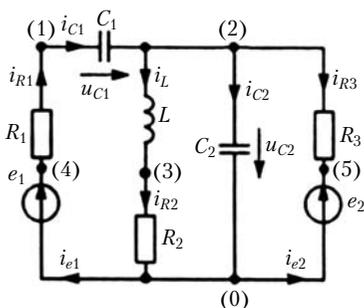


Рис. Т10.8

**10.28р.** Используя матрицу сечений-хорд, составьте уравнения баланса токов и напряжений цепи, схема которой приведена на рис. Т10.5, а.

**10.29.** Используя результаты решения задач 10.24, 10.27м, составьте уравнения баланса токов и напряжений для цепей рис. Т10.5, б, Т10.6, Т10.7.

**10.30р.** Составьте уравнения состояния для линейной

инвариантной во времени цепи (рис. Т10.8).

**10.31.** Составьте уравнения состояния для цепей, схемы которых изображены на рис. Т10.5, а, б.

**10.32м.** Составьте уравнения состояния для электрических цепей с топологическими вырождениями (см. рис. Т10.6 и Т10.7).

### Решения и методические указания

**10.23р.** Собственным деревом графа электрической цепи называют дерево, содержащее все источники напряжения и все емкостные элементы и не содержащее источников тока и индуктивных элементов. Для цепей, не имеющих топологических вырождений (емкостных контуров и индуктивных сечений), всегда можно построить, по крайней мере, одно собственное дерево. Граф цепи, изображенной на рис. Т10.5, а, имеет три различных собственных дерева (рис. Т10.9, а – в).

Матрица сечений-хорд  $\mathbf{Q}_x$ , соответствующая какому-либо собственному дереву графа, может быть сформирована двумя способами: 1) выделена из матрицы главных сечений; 2) построена при рассмотрении главных контуров, соответствующих выбранному собственному дереву.

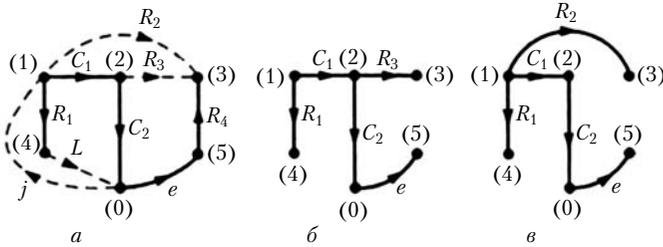


Рис. Т10.9

Для построения матрицы  $\mathbf{Q}_x$  первым из указанных способов пронумеруем ветви графа в следующем порядке:

- ветви с источниками напряжения;
- ветви с емкостными элементами;
- ветви с резистивными элементами, вошедшими в собственное дерево;
- ветви с резистивными элементами, не вошедшими в собственное дерево;
- ветви с индуктивными элементами;
- ветви с источниками тока.

Составим матрицу главных сечений графа рассматриваемой цепи, располагая столбцы в порядке возрастания номеров ветвей, а строки в порядке увеличения номеров ветвей дерева, соответствующих каждому из главных сечений. Для собственного дерева цепи, изображенного на рис. Т10.9, а, матрица главных сечений  $\mathbf{Q}$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} e & C_1 & C_2 & R_1 & R_4 & R_2 & R_3 & L & j \\ e & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 1 & -1 \\ C_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & -1 & 0 \\ R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{Q}_B \vdots \mathbf{Q}_x],$$

где  $\mathbf{Q}_B$  — единичная матрица, число столбцов и строк которой равно числу ветвей дерева;  $\mathbf{Q}_x$  — искомая матрица сечений-хорд (строки этой матрицы соответствуют ветвям собственного дерева, а столбцы — главным ветвям (хордам)):

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} e & C_1 & C_2 & R_1 & R_4 \\ e & 1 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ R_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ R_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_x = \begin{bmatrix} R_2 & R_3 & L & j \\ e & 1 & 1 & 0 & 0 \\ C_1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ C_2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ R_4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Элементы, входящие в какой-либо столбец матрицы  $\mathbf{Q}_x$ , показывают, какие ветви дерева и с какой ориентацией входят в главный контур, замыкаемый главной ветвью, соответствующей рассматриваемому столбцу. Элемент  $q_{ij}$ , стоящий на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, равен нулю, если  $i$ -я ветвь дерева не входит в главный контур, соответствующий  $j$ -й главной ветви;  $q_{ij} = -1$ , если  $i$ -я ветвь дерева входит в  $j$ -й главный контур и ее ориентация совпадает с направлением обхода контура;  $q_{ij} = 1$ , если  $i$ -я ветвь дерева входит в  $j$ -й главный контур, а ее направление противоположно направлению обхода контура. С учетом указанных свойств элементов  $q_{ij}$  матрица  $\mathbf{Q}_x$  может быть получена путем анализа состава главных контуров, соответствующих выбранному собственному дереву цепи, минуя этап составления матрицы главных сечений.

**10.25р.** Понятие нормального дерева вводится для цепей с топологическими вырождениями, для которых невозможно построить собственное дерево. Нормальным деревом графа электрической цепи называют дерево, содержащее все источники напряжения, максимально возможное число емкостных элементов, минимально возможное число индуктивных элементов и не содержащее источников тока. Для цепи, приведенной на рис. Т10.6, нормальное дерево состоит из источников напряжения  $e_1$ ,  $e_2$  и одной из емкостей  $C_1$  или  $C_2$  (рис. Т10.10, а, б).

**10.27м.** Матрица сечений-хорд, соответствующая выбранному нормальному дереву, для цепи с топологическими вырождениями строится таким же образом, как и матрица  $\mathbf{Q}_x$ , соответствующая собственному дереву для цепи без топологических вырождений (см. решение задачи 10.23р).

**10.28р.** Матрица сечений-хорд  $\mathbf{Q}_x$  позволяет выразить токи ветвей дерева  $\mathbf{i}_B$  через токи главных ветвей  $\mathbf{i}_x$  и напряжения главных ветвей  $\mathbf{u}_x$  через напряжения ветвей дерева  $\mathbf{u}_B$ :  $\mathbf{i}_B = -\mathbf{Q}_x \mathbf{i}_x$ ;  $\mathbf{u}_x = \mathbf{Q}_x^t \mathbf{u}_B$ .

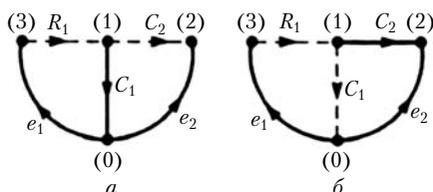


Рис. Т10.10

Для собственного дерева, изображенного на рис. Т10.9, *a* (см. решение задачи 10.23р), можно записать

$$\begin{bmatrix} i_B \\ i_{C1} \\ i_{C2} \\ i_{R1} \\ i_{R2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R2} \\ i_{R3} \\ i_L \\ j \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} u_{R2} \\ u_{R3} \\ u_L \\ -u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e \\ u_{C1} \\ u_{C2} \\ u_{R1} \\ u_{R4} \end{bmatrix}$$

или в скалярной форме

$$\begin{aligned} i_B &= -i_{R2} - i_{R3}; & u_{R2} &= -e + u_{C1} + u_{C2} + u_{R4}; \\ i_{C1} &= -i_{R2} - i_L + j; & u_{R3} &= -e + u_{C2} + u_{R4}; \\ i_{C2} &= -i_{R2} - i_{R3} - i_L + j; & u_L &= u_{C1} + u_{C2} - u_{R1}; \\ i_{R1} &= i_L; & -u_j &= -u_{C1} - u_{C2}; \\ i_{R4} &= -i_{R2} - i_{R3}. \end{aligned}$$

Напомним, что направления напряжений источников тока и ЭДС противоположны направлениям стрелок на условном графическом изображении этих источников.

**10.30р.** В соответствии с числом и типом энергоемких элементов цепи выберем в качестве независимых переменных (переменных состояния) ток индуктивного элемента  $i_L$  и напряжение емкостных элементов  $u_{C1}$  и  $u_{C2}$ . Данная цепь обладает единственным собственным деревом (рис. Т10.11).

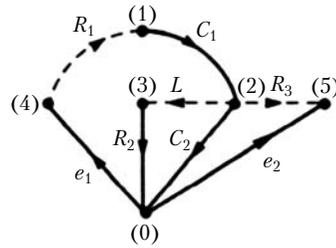


Рис. Т10.11

Соответствующая этому дереву матрица сечений-хорд имеет следующий вид:

$$\mathbf{Q}_x = \begin{bmatrix} R_1 & R_3 & L \\ e_1 & -1 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 & 0 \\ C_1 & -1 & 0 & 0 \\ C_2 & -1 & 1 & 1 \\ R_2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

С помощью матрицы  $\mathbf{Q}_x$  запишем топологические уравнения рассматриваемой цепи:

$$\begin{bmatrix} i_{B1} \\ i_{B2} \\ i_{C1} \\ i_{C2} \\ i_{R2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R1} \\ i_{R3} \\ i_L \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} u_{R1} \\ u_{R3} \\ u_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e_1 \\ -e_2 \\ u_{C1} \\ u_{C2} \\ u_{R2} \end{bmatrix}.$$

Используя эти уравнения, а также компонентные уравнения

$$i_{C1} = C_1 \frac{du_{C1}}{dt}; \quad i_{C2} = C_2 \frac{du_{C2}}{dt};$$

$$u_{R2} = R_2 i_{R2}; \quad u_{R1} = R_1 i_{R1}; \quad u_{R3} = R_3 i_{R3}; \quad u_L = L \frac{di_L}{dt},$$

найдем уравнения для производных от переменных состояния и для токов резистивных ветвей:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{du_{C1}}{dt} &= i_{C1} = i_{R1}; \\ C_2 \frac{du_{C2}}{dt} &= i_{C2} = i_{R1} - i_{R3} - i_L; \\ L \frac{di_L}{dt} &= u_L = u_{C2} - u_{R2}; \\ i_{R2} &= \frac{u_{R2}}{R_2} = i_L; \\ i_{R1} &= \frac{1}{R_1} (e_1 - u_{C1} - u_{C2}); \\ i_{R3} &= \frac{1}{R_3} (-e_2 + u_{C2}). \end{aligned}$$

Исключив из найденных уравнений все переменные, кроме переменных состояния, получим

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} &= u_{C2} - R_2 i_L; \\ C_1 \frac{du_{C1}}{dt} &= -\frac{u_{C1}}{R_1} - \frac{u_{C2}}{R_1} + \frac{e_1}{R_1}; \end{aligned}$$

$$C_2 \frac{du_{C2}}{dt} = -i_L - \frac{u_{C1}}{R_1} - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) u_{C2} + \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_3},$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_2 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} \\ 1 & \frac{1}{R_1} & \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & 0 \\ \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}.$$

**10.32м.** Уравнения состояния цепей с топологическими вырождениями наряду с  $\nu$  дифференциальными уравнениями, где  $\nu$  — порядок сложности цепи, содержат также алгебраические уравнения, связывающие между собой напряжения емкостных элементов, образующих емкостные контуры, или токи индуктивных элементов, входящих в индуктивные сечения.

## Ответы

### Глава 1

1.2.  $u = 20(1 - e^{-10^6 t})$  мВ;  $p = 20(1 - 2e^{-10^6 t} + e^{-2 \cdot 10^6 t})$  мкВт;  $w = 20 \cdot 10^6 t + 40e^{-10^6 t} - 10e^{-2 \cdot 10^6 t} - 30$  пДж.

$t$ , мкс	0	0,25	2	10
$u$ , мВ	0	4,42	17,3	20
$p$ , мкВт	0	0,979	15	20
$w$ , пДж	0	0,0867	15,2	170

1.5. Кривые  $u_L(t)$  приведены на рис. О.1, а, б для случаев, приведенных на рис. Т1.3, а, б.

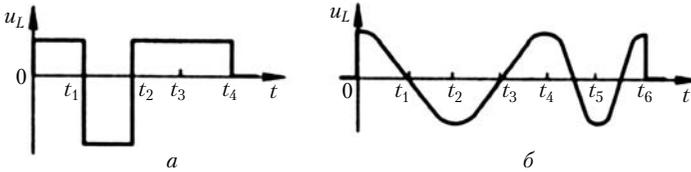


Рис. О.1

- 1.7м. а) Исходных данных для ответа на вопрос недостаточно; б) да.
- 1.9м.  $i_L = 0$  при  $t < t_0$ ;  $i_L = 10^4(t - t_0)$  А при  $t_0 \leq t < t_0 + T$ ;  $i_L = 12$  мА при  $t \geq t_0 + T$ .
- 1.11.  $u_L = 0,86 \cos(10^6 t + 0,4\pi)$  В. При  $t_1 = 1$  мкс индуктивность отдает энергию, так как  $p_L(t_1) = -84,3$  мВт < 0.
- 1.12  $u_L(t_1) = 0,449$  мВ;  $w_L(t_1) = 1,28$  пДж.
- 1.14.  $R_i = 1/G_i = 2,38$  кОм;  $e = R_i j = 6,71$  В.
- 1.15.  $j = 8,4$  мА,  $G_i = 0,667$  мСм.
- 1.18.  $j = 0,814$  мА,  $G_i = 0,675$  мСм.
- 1.19.  $R_i = 0,112$  Ом.
- 1.20.  $R_i \leq 2$  Ом.
- 1.21.  $i_{R1} = 80$  мА;  $i_{R2} = 40$  мА.
- 1.23.  $u_{R1} + u_{R2} - u_{C2} = e$ ;  $u_{R1} + u_{R2} + u_{R4} + u_{R5} = e$ ;  $u_{R1} + u_{C1} + u_{R3} = e$ ;  
 $-u_{R3} + u_{C3} + u_{R5} = 0$ ;  $u_{C2} + u_{R4} + u_{R5} = 0$ ;  $u_{C1} + u_{C3} - u_{R4} - u_{R2} = 0$ ;  
 $u_{R1} + u_{C1} + u_{C3} + u_{R5} = e$ ;  $u_{R1} + u_{C1} + u_{C3} - u_{R4} - u_{C2} = e$ ;  
 $u_{C2} - u_{R2} + u_{C1} + u_{C3} + u_{R5} = 0$ ;  $u_{C2} - u_{R2} + u_{C1} + u_{R3} = 0$ ;  
 $u_{C2} + u_{R4} - u_{C3} + u_{R3} = 0$ ;  $u_{C1} + u_{R3} - u_{R5} - u_{R4} - u_{R2} = 0$ .
- Вычитая из второго уравнения первое, можно получить пятое, вычитая из девятого десятое — четвертое и т.д.

**1.24.** Уравнения баланса:  $-i_1 + i_2 + i_3 = 0$ ;  $i_1 - i_2 - i_3 = 0$ ;  $u_C - u_R = 0$ ;  $u_L + u_R = e$ ;  $u_L + u_C = e$ .

Компонентные уравнения:  $u_R = Ri_2$ ;  $u_L = Ldi_1/dt$ ;  $i_3 = Cdu_C/dt$ .

Основная система уравнений электрического равновесия состоит из компонентных уравнений и любых трех линейно независимых уравнений баланса, например первого, третьего и четвертого.

**1.30.** Одна из возможных систем уравнений:

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0; -i_2 + i_6 + i_7 = 0; -i_3 - i_4 + i_5 = 0; -i_5 - i_7 + i_8 = 0;$$

$$-i_9 + i_1 = 0; u_1 + u_3 - u_4 = e; u_4 + u_5 + u_8 = 0;$$

$$u_1 + u_2 + u_7 + u_8 = e; u_1 + u_2 + u_6 = e;$$

$$i_1 = u_1/R_1; i_2 = C_1 du_2/dt; i_3 = u_3/R_2; i_4 = C_2 du_4/dt; i_5 = u_5/R_4; i_6 = u_6/R_3;$$

$$i_7 = C_3 du_7/dt; i_8 = u_8/R_5.$$

**1.31. а)**  $-i_1 + i_2 = 0$ ;  $-i_2 - i_3 + i_4 = 0$ ;  $-i_4 + i_5 = 0$ ;  $-i_5 + i_6 + i_7 = 0$ ;

$$u_2 - u_3 = e$$
;  $u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 0$ ;  $u_7 - u_6 = 0$ ;  $u_2 = R_1 i_2$ ;  $u_3 = L_2 di_3/dt$ ;

$$u_4 = L_1 di_4/dt$$
;  $i_5 = C_1 du_5/dt$ ;  $i_6 = C_2 du_6/dt$ ;  $u_7 = R_2 i_7$ ;

б)  $-i_1 + i_2 = 0$ ;  $-i_2 - i_4 - i_5 + i_6 = 0$ ;  $-i_3 + i_4 = 0$ ;  $-i_6 + i_7 + i_8 + i_{10} = 0$ ;

$$-i_8 + i_9 = 0$$
;  $u_2 - u_3 - u_4 = e$ ;  $-u_3 - u_4 + u_5 = 0$ ;  $u_3 + u_4 + u_6 + u_8 + u_9 = 0$ ;

$$u_3 + u_4 + u_6 + u_7 = 0$$
;  $u_3 + u_4 + u_6 + u_{10} = 0$ ;  $u_2 = R_1 i_2$ ;  $u_3 = L_1 di_3/dt$ ;

$$u_4 = R_2 i_4$$
;  $i_5 = C_1 du_5/dt$ ;  $i_6 = C_2 du_6/dt$ ;  $u_8 = R_3 i_8$ ;  $u_9 = L_2 di_9/dt$ ;

$$u_{10} = R_4 i_{10}$$
, где  $i_7 = j$ ,  $u_7 = -u_j$ .

**1.33.**  $di_3/dt + (1/RC)i_3 = dj/dt$ .

## Глава 2

**2.1. а)**  $U_m = 0,4$  В;  $U = 0,283$  В;  $T = 2$  мс;  $f = 0,5$  кГц;  $\omega = 3140$  рад/с;  $\psi_u = -45^\circ$ ; б)  $I_m = 5$  мА;  $I = 3,54$  мА;  $\psi_i = 90^\circ$ . Для определения периода, частоты и угловой частоты исходных данных недостаточно.

**2.2м.**  $U_{m1} = 5$  В;  $U_1 = 3,54$  В;  $f_1 = 1,59$  кГц;  $\omega_1 = 10^4$  рад/с;  $\psi_1 = 60^\circ$ ;  $U_{m2} = 7,07$  В;  $U_2 = 5$  В;  $f_2 = 10$  кГц;  $\omega_2 = 6,28 \cdot 10^4$  рад/с;  $\psi_2 = -60^\circ$ ;  $U_{m3} = 4,24$  В;  $U_3 = 3$  В;  $f_3 = 50$  Гц;  $\omega_3 = 100\pi$  рад/с;  $\psi_3 = -60^\circ$ ;  $u_1(t_1) = -2,29$  В;  $u_2(t_1) = 3,54$  В;  $u_3(t_1) = 2,23$  В.

**2.3м.**  $U_{m1} = 10$  В;  $U_1 = 7,07$  В;  $\dot{U}_{m1} = 10e^{j30^\circ}$  В;  $\dot{U}_1 = 7,07e^{j30^\circ}$  В;  $\underline{u}_1 = 10e^{j30^\circ} e^{j\omega t}$  В;  $U_{m2} = 4,24$  В;  $U_2 = 3$  В;  $\dot{U}_{m2} = 4,24e^{-j60^\circ}$  В;  $\dot{U}_2 = 3e^{-j60^\circ}$  В;  $\underline{u}_2 = 4,24e^{-j60^\circ} e^{j\omega t}$  В;  $U_{m3} = 1,7$  мВ;  $U_3 = 1,2$  мВ;  $\dot{U}_{m3} = 1,7e^{-j60^\circ}$  мВ;  $\dot{U}_3 = 1,2e^{-j60^\circ}$  мВ;  $\underline{u}_3 = 1,7e^{-j60^\circ} e^{j\omega t}$  мВ;  $U_{m4} = 11,3$  В;  $U_4 = 7,99$  В;  $\dot{U}_{m4} = 11,3e^{-j28^\circ}$  В;  $\dot{U}_4 = 7,99e^{-j28^\circ}$  В;  $\underline{u}_4 = 11,3e^{-j28^\circ} e^{j\omega t}$  В;  $I_{m1} = 3$  А;  $I_1 = 2,12$  А;  $\dot{I}_{m1} = 3e^{j146^\circ}$  А;  $\dot{I}_1 = 2,12e^{j146^\circ}$  А;  $\underline{i}_1 = 3e^{j146^\circ} e^{j\omega t}$  А;  $I_{m2} = 0,5$  мкА;  $I_2 = 0,354$  мкА;  $\dot{I}_{m2} = 0,5e^{-j90^\circ}$  мкА;  $\dot{I}_2 = 0,354e^{-j90^\circ}$  мкА;  $\underline{i}_2 = 0,5e^{-j90^\circ} e^{j\omega t}$  мкА;  $I_{m3} = 0,1$  А;  $I_3 = 70,7$  мА;  $\dot{I}_{m3} = 0,1$  А;  $\dot{I}_3 = 70,7$  мА;  $\underline{i}_3 = 0,1e^{j\omega t}$  мА;  $I_{m4} = 1,41$  А;  $I_4 = 1$  А;  $\dot{I}_{m4} = 1,41e^{j180^\circ}$  А;  $\dot{I}_4 = e^{j180^\circ}$  А;  $\underline{i}_4 = 1,41e^{j180^\circ} e^{j\omega t}$  А.

**2.4.**  $\dot{U}_m = 0,4e^{-j45^\circ}$  В;  $\dot{U} = 0,283e^{-j45^\circ}$  В;  $\underline{u} = 0,4e^{j(3140t-45^\circ)}$  В;  $\dot{I}_m = 5e^{j90^\circ}$  мА;  $\dot{I} = 3,54e^{j90^\circ}$  мА;  $\underline{i} = 5e^{j(\omega t+90^\circ)}$  мА.

**2.5.**  $\dot{I}_1 = 0,2 + j0,0087$  А;  $\dot{I}_2 = 9,38 - j22,1$  мкА;  $\dot{I}_3 = -9,31 - j1,31$  А;  $\dot{I}_4 = -0,05 - j0,708$  А;  $\dot{I}_5 = 17 - j80,2$  мкА;  $\dot{I}_6 = -287 + j201$  мА;  $\dot{I}_7 = 19,8 + j19,8$  мА;  $\dot{I}_8 = -263 - j390$  мкА.

**2.6.**  $\dot{U}_1 = 2,7e^{j200^\circ}$  В;  $\dot{U}_2 = 54e^{j10^\circ}$  В;  $\dot{U}_3 = 0,707e^{-j135^\circ}$  В;  $\dot{U}_4 = 37e^{j180^\circ}$  В;  $\dot{U}_5 = 144e^{-j90^\circ}$  мВ;  $\dot{U}_6 = 0,3e^{-j100^\circ}$  В;  $\dot{U}_7 = 0,1e^{j47^\circ}$  В;  $\dot{U}_8 = e^{-j82^\circ}$  В;  $\dot{U}_9 = 1,12e^{-j2,2^\circ}$  В.

**2.7м.**  $u_1 = 7,5\cos(\omega t + 45^\circ)$  В;  $u_2 = 0,792\cos(\omega t + 124^\circ)$  В;  $u_3 = 70,7\cos(\omega t)$  мВ;  $u_4 = 4,24\cos(\omega t - 45^\circ)$  мВ;  $u_5 = 67,9\cos(\omega t)$  В;  $u_6 = 22\cos(\omega t + 48^\circ)$  В;  $u_7 = 22\cos(\omega t - 48^\circ)$  В;  $u_8 = 22\cos(\omega t + 132^\circ)$  В;  $u_9 = 22\cos(\omega t - 132^\circ)$  В;  $u_{10} = \cos(\omega t)$  кВ;  $u_{11} = 0,342\cos(\omega t + 90^\circ)$  мВ;  $u_{12} = 3\cos(\omega t + 2,86^\circ)$  В.

**2.8м.**  $i_1 = 16,8\cos(\omega t - 72,6^\circ)$  А;  $i_2 = 4,25\cos(\omega t - 3,8^\circ)$  мА;  $i_3 = 9,49\cos(\omega t + 153,4^\circ)$  А;  $i_4 = 5\cos(\omega t)$  А;  $i_5 = 3\cos(\omega t - 90^\circ)$  мА;  $i_6 = 22,8\cos(\omega t + 90^\circ)$  А.

**2.9м.** а)  $\dot{I}_{m1} = 7,51e^{j150^\circ}$  А; б)  $\dot{I}_{m1} = 10,2e^{j1,16^\circ}$  А; в)  $\dot{I}_{m1} = 0$ ; г)  $\dot{I}_{m1} = 3,39e^{-j46,5^\circ}$  А.

**2.11м.**  $I_m = 1,33$  А;  $\psi = 106^\circ$ .

**2.12.**  $\dot{U}_{m1} = 14,5e^{j39,9^\circ}$  В;  $\dot{U}_{m2} = 6,2e^{j6,2^\circ}$  В;  $\dot{U}_{m3} = 36,1e^{j131,6^\circ}$  В;  $\dot{U}_{m4} = 1,25e^{j175,2^\circ}$  В.

**2.13м.** а)  $R = 85,7$  Ом; б)  $C = 6,19$  мкФ; в)  $L = 45,5$  мГн.

**2.14.** а)  $Z = 2e^{j\pi/6}$  кОм;  $Y = 0,5e^{-j\pi/6}$  мСм; б)  $Z = 177e^{-j60^\circ}$  Ом;  $Y = 5,64e^{j60^\circ}$  мСм;

в)  $Z = 80e^{-j45^\circ}$  кОм;  $Y = 12,5e^{j45^\circ}$  мСм; г)  $Z = 85,7e^{-j90^\circ}$  Ом;  $Y = 11,7e^{j90^\circ}$  мСм.

**2.15м.**  $g_1 = 0,0882$  См;  $b_1 = -0,147$  См;  $g_2 = 0,147$  См;  $b_2 = -0,0882$  См;  $g_3 = 32,9$  мСм;  $b_3 = 112$  мСм;  $g_4 = 17,3$  мСм;  $b_4 = -10$  мСм;  $g_5 = 0,574$  мСм;  $b_5 = 2$  мСм;  $g_6 = 357$  мСм;  $b_6 = 0$ ;  $g_7 = 0$ ;  $b_7 = -8$  мСм.

**2.16м.**  $r_1 = 19,5$  Ом;  $x_1 = 7,96$  Ом;  $r_2 = 0$ ;  $x_2 = -8,33$  Ом;  $r_3 = 84,3$  Ом;  $x_3 = -148$  Ом;  $r_4 = 63,7$  Ом;  $x_4 = -19,8$  Ом.

**2.17.**  $Z_1 = -j2 = 2e^{-j\pi/2}$  Ом;  $Y_1 = j0,5 = 0,5e^{j\pi/2}$  См;  $\varphi_1 = -\pi/2$ ;  $\dot{I}_{m1} = 4,25e^{j\pi}$  А;  $\dot{I}_1 = 3,01e^{j\pi}$  А;  $i_1 = 4,25\cos(10^6 t + \pi)$  А;  $\omega_1 = 6,47$  мкДж;  $W_{1\max} = 18,1$  мкДж;  $t_1 = (2n + 1)\pi/4$  мкс,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $Z_2 = -j20 = 20e^{-j\pi/2}$  Ом;  $Y_2 = j0,05 = 0,05e^{j\pi/2}$  См;  $\varphi_2 = \varphi_1$ ;  $\dot{I}_{m2} = 0,425e^{j\pi}$  А;  $\dot{I}_2 = 0,301e^{j\pi}$  А;  $i_2 = 0,425\cos(10^6 t + \pi)$  А;  $\omega_2 = 0,647$  мкДж;  $W_{2\max} = 18,1$  мкДж;  $t_2 = t_1$ .

**2.18.**  $Z = j24 = 24e^{j\pi/2}$  Ом;  $\dot{U} = 2,55e^{j150^\circ}$  В;  $u = 3,6 \cos(10^6 t + 150^\circ)$  В;  $\omega = 56,8$  нДж;  $t = \pi(n - 1/3) 5/4$  мкс.

**2.19.**  $\dot{U} = 70,7e^{-j60^\circ}$  В;  $P_A = 0,1$  Вт;  $\omega(t_1) = 0,139$  мкДж;  $\omega(t_2) = 0,1$  Дж.

**2.20.**  $-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0$ ;  $-\dot{I}_2 - \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = 0$ ;  $-\dot{I}_4 + \dot{I}_5 = 0$ ;  $-\dot{I}_5 + \dot{I}_6 + \dot{I}_7 = 0$ ;  $\dot{U}_{R1} - \dot{U}_{L2} = \dot{E}$ ;  $\dot{U}_{L2} + \dot{U}_{L1} + \dot{U}_{C1} + \dot{U}_{C2} = 0$ ;  $\dot{U}_{R2} - \dot{U}_{C2} = 0$ ;  $\dot{U}_{R1} = R_1 \dot{I}_2$ ;  $\dot{U}_{L1} = j\omega L_1 \dot{I}_4$ ;  $\dot{U}_{L2} = j\omega L_2 \dot{I}_3$ ;  $\dot{U}_{R2} = R_2 \dot{I}_7$ ;  $\dot{U}_{C1} = \dot{I}_5 / (j\omega C_1)$ ;  $\dot{U}_{C2} = \dot{I}_6 / (j\omega C_2)$ .

**2.21.**  $-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0; \dot{U}_R + \dot{U}_L - \dot{E} = 0; \dot{U}_C - \dot{U}_R = 0; \dot{U}_R = R\dot{I}_2;$   
 $\dot{U}_C = \dot{I}_3/(j\omega C); \dot{U}_L = j\omega L\dot{I}_1 - \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0; j\omega L\dot{I}_1 + R\dot{I}_2 - \dot{E} = 0;$   
 $\dot{I}_3/(j\omega C) - R\dot{I}_2 = 0.$

**2.22.**  $-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0; -\dot{I}_1 + \dot{I}_6 + \dot{I}_7 = 0; -\dot{I}_3 - \dot{I}_4 + \dot{I}_5 = 0;$   
 $-\dot{I}_5 - \dot{I}_7 + \dot{I}_8 = 0; \dot{I}_1 - \dot{I}_9 = 0; \dot{U}_1 + \dot{U}_3 - \dot{U}_4 = 0; \dot{U}_4 + \dot{U}_5 + \dot{U}_8 = 0;$   
 $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_6 = 0; \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_7 + \dot{U}_8 = 0.$

**2.23.** Одна из возможных систем уравнений:  $\dot{J}_{m2} - \dot{I}_{m1} - \dot{I}_{m4} = 0;$   
 $-\dot{I}_{m2} + \dot{I}_{m4} - \dot{I}_{m5} = 0; \dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2} + \dot{I}_{m3} + \dot{J}_{m1} = 0; R\dot{I}_{m4} + j\omega L\dot{I}_{m2} = -\dot{E}_{m1} +$   
 $+ \dot{E}_{m2}; j\omega L\dot{I}_{m2} - \dot{I}_{m3}/(j\omega C) = -\dot{E}_{m3}.$

**2.24м.**  $Z_{\text{вх}1} = 40 \text{ Ом}; Z_{\text{вх}2} = 40 + j30,2 = 50,1e^{j37^\circ} \text{ Ом}; \dot{I}_{m1} = 2,5 \text{ А};$   
 $\dot{I}_{m2} = 2e^{-j37^\circ} \text{ А}.$

**2.25м.**  $\dot{U}_{m1R} = 100 \text{ В}; \dot{U}_{m1L} = 75,4e^{j90^\circ} \text{ мВ}; \dot{U}_{m2R} = 79,8e^{-j37^\circ} \text{ В};$   
 $\dot{U}_{m2L} = 60,2e^{j53^\circ} \text{ В}.$

**2.29м.**  $Z_{\text{вх}} = 0,996 - j0,451 = 1,09e^{-j24,3^\circ} \text{ кОм}; Y_{\text{вх}} = 0,833 + j0,377 =$   
 $= 0,915e^{j24,3^\circ} \text{ мСм}.$

**2.30.**  $\dot{U}_m = 48,2e^{j15,8^\circ} \text{ В}; \dot{I}_{mR} = 1,21e^{j15,8^\circ} \text{ А}; \dot{I}_{mL} = 1,6e^{-j74,2^\circ} \text{ А}.$

**2.32.**  $U_L = 40 \text{ мВ}.$

**2.33.**  $Z_{\text{вх}} = 6,16e^{j68,4^\circ} \text{ Ом}.$

**2.34м.**  $\omega = 6,61 \cdot 10^3 \text{ рад/с}.$

**2.35.**  $f_1 = 265 \text{ кГц}; f_2 = 459 \text{ кГц}.$

**2.37м.**  $Z_{\text{вх}} = 1700 - j465 = 1760e^{-j15,3^\circ} \text{ Ом}; \dot{I}_{\text{вх}} = 1,05 + j0,573 =$   
 $= 1,198e^{j28,6^\circ} \text{ МА}.$

**2.39м.**  $\dot{I}_1 = 1,57e^{j168,7^\circ} \text{ МА}; \dot{I}_2 = 0,784e^{j78,7^\circ} \text{ МА}; \dot{I}_3 = 1,24e^{-j119,7^\circ} \text{ МА};$   
 $\dot{U}_R = 1,57e^{j168,7^\circ} \text{ В}; \dot{U}_L = 1,57e^{j168,7^\circ} \text{ В}; \dot{U}_C = 0,62e^{j150,3^\circ} \text{ В}; \dot{U}_j =$   
 $= 2,56e^{-j6,91^\circ} \text{ В}.$

**2.40.**  $R_{\text{вх}} = 1,65 \text{ кОм}.$

**2.42м.**  $C_{\text{посл}} = 2,18 \text{ мкФ}; C_{\text{пар}} = 1,28 \text{ мкФ}.$

**2.43.** а)  $P_A = 0,336 \text{ нВт}; P_Q = 0; P_S = 0,336 \text{ нВ} \cdot \text{А}; \underline{P}_S = 0,336 \text{ нВ} \cdot \text{А};$   
 б)  $P_A = 0; P_Q = -0,336 \text{ нвар}; P_S = 0,336 \text{ нВ} \cdot \text{А}; \underline{P}_S = -j0,336 \text{ нВ} \cdot \text{А};$   
 в)  $P_A = 0; P_Q = 0,336 \text{ нвар}; P_S = 0,336 \text{ нВ} \cdot \text{А}; \underline{P}_S = j0,336 \text{ нВ} \cdot \text{А}.$

**2.45.** а)  $\underline{P}_{S \text{ ист}} = 2,43 - j0,665 \text{ мВ} \cdot \text{А}; P_A \text{ потр} = 2,43 \text{ мВт}; P_Q \text{ потр} =$   
 $= -0,665 \text{ мвар};$  б)  $\underline{P}_{S \text{ ист}} = 2,46 + j0,462 \text{ мВ} \cdot \text{А}; P_A \text{ потр} = 2,46 \text{ мВт};$   
 $P_Q \text{ потр} = 0,462 \text{ мвар}.$

**2.46.**  $Z_{\text{н опт}} = 1 - j0,785 \text{ кОм}; P_A = 1,25 \text{ мкВт}; \eta = 0,5.$

**2.47.**  $\eta_1 = 0,658; \eta_2 = 0,342.$

**2.49.** Для рис. Т2.16, а  $-Z_{\text{вх}} = [Z_1(Z_2 + Z_3)/(Z_1 + Z_2 + Z_3)] + Z_4,$  для  
 рис.Т2.16, б  $-Z_{\text{вх}} = [Z_2(Z_3 + Z_4 + Z_5)/(Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5)] + Z_1.$

**2.51.** Для рис. Т2.17, а  $-Z_{\text{вх}} = -j3,18 \text{ кОм}; C_{\text{эк}} = 50 \text{ пФ};$  для  
 рис. Т2.17, б  $-Z_{\text{вх}} = j11,2 \text{ кОм}; L_{\text{эк}} = 1,78 \text{ мГн}.$

**2.52м.**  $Z_{\text{вх}1} = 1,35 - j3,28 \text{ кОм}; Z_{\text{вх}2} = 2,6 + j0,8 \text{ кОм}; Z_{\text{вх}3} =$   
 $= 1,11 - j2,65 \text{ кОм}.$

**2.53м.**  $R'_1 = 1,35$  кОм;  $C'_1 = 1,22$  нФ;  $R''_1 = 9,35$  кОм;  $C''_1 = 1,04$  нФ;  
 $R'_2 = 2,6$  кОм;  $L'_2 = 1,6$  мГн;  $R''_2 = 2,85$  кОм;  $L''_2 = 18,5$  мГн;  
 $R'_3 = 1,11$  кОм;  $C'_3 = 378$  пФ;  $R''_3 = 7,45$  кОм;  $C''_3 = 321$  пФ.

**2.54м.**  $R' = 996$  Ом;  $C' = 2,94$  нФ.

**2.55м.**  $R' = 10$  Ом;  $C' = 1$  нФ.

**2.56м.**  $R' = 14,6$  Ом;  $L' = 153$  мкГн.

**2.58м.**  $i_5 = 71,4$  мА.

**2.59м.**  $R_{\text{вх}} = 671$  Ом.

**2.62.**  $Y_{\text{вх}} = 23,4$  мСм.

**2.64.** Для рис. Т2.26,  $a$  — это зажимы 1 и 3, 2 и 4, для рис. Т2.26,  $b$  — это зажимы 1 и 3, 2 и 4, для рис. Т2.26,  $v$  — это зажимы 1 и 4, 2 и 3, 3 и 6, 4 и 5, 1 и 6, 2 и 5.

**2.65.**  $L_{\text{эк max}} = 2,8$  Гн;  $L_{\text{эк min}} = 1,2$  Гн.

**2.66.**  $L_{\text{эк}} = 7,2$  мГн.

**2.69.**  $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$ ;  $(j\omega L_1 - j\omega M_{12})\dot{I}_1 + (j\omega M_{12} - j\omega L_2)\dot{I}_2 + (j\omega M_{13} + j\omega M_{23})\dot{I}_3 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2$ ;  $(j\omega M_{12} - j\omega M_{13})\dot{I}_1 + (j\omega L_2 + j\omega M_{23})\dot{I}_2 - (j\omega M_{23} + j\omega L_3)\dot{I}_3 = \dot{E}_2 - \dot{E}_3$ .

**2.71.**  $Z_{\text{вх1}} = 135$  Ом;  $Z_{\text{вх2}} = 43,4 - j6,78$  Ом.

**2.72.**  $R_{\text{эк}} = 1,48$  Ом;  $L_{\text{эк}} = 5,07$  мГн.

**2.73м.**  $L = 10$  мГн;  $M = 1,0$  мГн;  $k = 0,1$ .

**2.74.**  $R_{\text{эк2}} = 1,42$  Ом.

**2.75.**  $L_{\text{эк1}} = 1,43$  мкГн;  $R_{\text{эк1}} = 0,257$  Ом;  $L_{\text{эк2}} = 14,4$  мкГн;  $R_{\text{эк2}} = 2,32$  Ом.

**2.76.**  $R_{\text{эк}} = 3$  Ом. При согласном включении  $L_{\text{эк1}} = 3,28$  мГн;  $L_{\text{эк2}} = 5,55$  мГн, при встречном включении  $L_{\text{эк1}} = 2,72$  мГн;  $L_{\text{эк2}} = 0,454$  мГн.

**2.77м.** При согласном включении  $R_{\text{эк1}} = 0,667$  Ом;  $L_{\text{эк1}} = 0,729$  мГн;  $R_{\text{эк2}} = 3,27$  Ом;  $L_{\text{эк2}} = 0,838$  мГн, при встречном включении  $R_{\text{эк1}} = 0,667$  Ом;  $L_{\text{эк1}} = 0,603$  мГн;  $R_{\text{эк2}} = 0,684$  Ом;  $L_{\text{эк2}} = 0,0685$  мГн.

**2.79м.** Для рис. Т2.32,  $a - C = 99,5$  нФ;  $n = 1,19$ , для рис. Т2.32,  $b - C = 142$  нФ;  $n = 1,19$ , для рис. Т2.32,  $v - C = 1,02$  мкФ;  $n = 1,25$ , для рис. Т2.32,  $z - C = 1,59$  мкФ;  $n = 1,25$ .

### Глава 3

**3.2.**  $K(\omega) = [4 + (\omega RC)^2]^{-1/2}$ ;  $\psi(\omega) = -\arctg(\omega RC/2)$  (рис. О.2,  $a, b$ );  
 $K(\omega) = 1$ ;  $\psi(\omega) = -2\arctg(\omega RC)$  (рис. О.2,  $v, z$ );

**3.3м.**  $Y(\omega) = [1/R^2 + 1/(\omega L)^2]^{1/2}$ ;  $\vartheta(\omega) = -\arctg(R/\omega L)$ .

**3.6.**  $G_{21}(\omega) = [1 + (\omega RC)^2]^{-1/2}$ ;  $\psi_{21}(\omega) = -\arctg(\omega RC)$ .

**3.7.**  $\omega_0 = 10^6$  рад/с;  $\psi(\omega_0) = 0$ .

**3.8м.** При  $\psi = \pi/2$  для рис. Т3.5,  $a - \omega = 10^6$  рад/с;  $K(\omega) = 0,333$ , для рис. Т3.5,  $b - \omega = 0,447 \cdot 10^6$  рад/с;  $K(\omega) = 0,386$ . При  $\psi = -\pi$  для рис. Т3.5,  $a - \omega \rightarrow \infty$ ;  $K(\omega) \rightarrow 0$ , для рис. Т3.5,  $b - \omega = 2,45 \cdot 10^6$  рад/с;  $K(\omega) = 0,0345$ .

**3.9м.**  $R = \sqrt{L/C}$ .

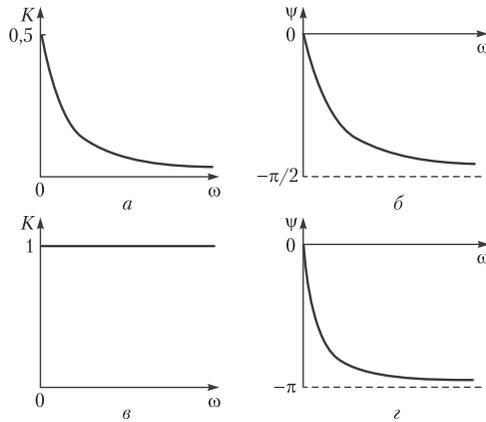


Рис. 0.2

**3.10м.**  $\omega = \sqrt{2/LC}$ .

**3.11.**  $Z_{21}(\omega) = R_2[1 + (\omega R_2 C)^2]^{-1/2}$ .

$Y_{21}(\omega) = [(R_1 + R_2)^2 + (\omega R_1 R_2 C)^2]^{-1/2}$ ;

**3.12.**  $f_0 = 766$  кГц;  $\rho = 866$  Ом;  $Q = 106$ ;  $\Pi_f = 7,25$  кГц.

**3.13.** а)  $f_{0,a} = f_0$ ;  $Q_a = Q/2$ ;  $\Pi_{f,a} = 2\Pi_f$ ; б)  $f_{0,b} = f_0/\sqrt{2}$ ;  $Q_b = \sqrt{2}Q$ ;  $\Pi_{f,b} = \Pi_f/2$ ; в)  $f_{0,b} = f_0/\sqrt{2}$ ;  $Q_b = Q/\sqrt{2}$ ;  $\Pi_{f,b} = \Pi_f$ .

**3.14.**  $C = 48,3$  пФ;  $R = 11,7$  Ом.

**3.16м.**  $\Delta f_1 = 8,11$  кГц;  $\Delta f_2 = 0,112$  кГц;  $\Delta f_3 = -3,89$  кГц;  $\delta_1 = 0,0811$ ;  $\delta_2 = 1,22 \cdot 10^{-3}$ ;  $\delta_3 = -0,0442$ ;  $\xi_1 = 6,11$ ;  $\xi_2 = 0,0878$ ;  $\xi_3 = -3,12$ ;  $z_1 = 198$  Ом;  $z_2 = 32,1$  Ом;  $z_3 = 105$  Ом;  $\varphi_1 = 80,7^\circ$ ;  $\varphi_2 = 5^\circ$ ;  $\varphi_3 = -72,2^\circ$ .

**3.17м.**  $f_{H1} = 159$  кГц;  $f_{B1} = 161$  кГц;  $f_{H2} = 135$  кГц;  $f_{B2} = 190$  кГц.

**3.18м.**  $f_0 = 464$  кГц;  $\Pi_f = 16,2$  кГц.

**3.19м.**  $R_i = 6$  Ом.

**3.21м.**  $z(\delta = 0,01) \approx z(\delta = -0,01) = 27$  Ом;  $z(\delta = 0,08) = 81$  Ом;  $z(\delta = -0,08) = 87$  Ом.

**3.22.**  $\Delta f = 15$  кГц;  $R = 25$  Ом;  $L = 9,23$  мкГн;  $\Delta f = -15$  кГц;  $R = 25$  Ом;  $C = 10,8$  нФ.

**3.23.**  $L = 11,5$  мкГн;  $Q_C = 2520$ .

**3.24м.**  $\Pi_{f1} = 8,12$  кГц;  $\Pi_{f2} = 14,1$  кГц;  $\Pi_{f3} = 80,8$  кГц;  $\Pi_{f4} = 812$  кГц.

**3.25м.**  $\Pi_{f1} = 5,22$  кГц;  $\Pi_{f2} = 8,12$  кГц;  $\Pi_{f3} = 24,4$  кГц;  $\Pi_{f4} = 80,8$  кГц.

**3.29м.**  $C_1 = 711$  пФ;  $C_2 = 57$  пФ.

**3.30м.**  $Q_{\text{эк}1} = 50$ ;  $Q_{\text{эк}2} = 100$ ;  $Q_{\text{эк}3} = 200$ ;  $Q_{\text{эк}4} < 0$ .

**3.31.** В 2 раза.

**3.34.**  $Q_{\text{эк}} = 44,8$ ;  $\Pi_f = 13,2$  кГц.

**3.35м.**  $z_1 \approx z_2 \approx 29$  кОм;  $\varphi_1 \approx -\varphi_2 \approx -51^\circ$ ;  $z_3 = 3,89$  кОм;  $\varphi_3 = -85,2^\circ$ ;  $\varphi_4 = 85,6^\circ$ ;  $z_4 = 3,52$  кОм.

**3.36м.**  $\dot{U}_{m1} = 115e^{-j43,8^\circ}$  мВ;  $\dot{U}_{m2} = 114e^{j44,1^\circ}$  мВ;  $\dot{U}_{m3} = 17,1e^{-j83,8^\circ}$  мВ;  $\dot{U}_{m4} = 15,5e^{j84,3^\circ}$  мВ.

**3.38.**  $p_L = 0,25$ ;  $R_0(p_L) = 3,72$  кОм;  $f_{0н} = 839$  кГц; значения  $f_{0т}$ ,  $\rho$  и  $Q$  не изменились.

**3.40.**  $f_{0н} = 1,55$  МГц;  $p_C = 0,13$ ;  $R_0(p_C) = 5,6$  кОм;  $Q_{эк} = 136$ ;  $\Pi_f = 12,2$  кГц;  $U_{к рт} = 1,27$  В; значения  $f_{0т}$ ,  $\rho$ ,  $Q$ ,  $U_{к рн}$  не изменились.

**3.41.** Контур с разделенной индуктивностью,  $R = 15,8$  Ом.

**3.42м.**  $f_{0т} = 425$  кГц;  $f_{0н1} = 653$  кГц;  $f_{0н2} = 311$  кГц;  $\rho = 2,3$  кОм;  $Q = 106$ ;  $R_0 = 29,5$  кОм.

**3.44.**  $p_L = 0,736$ .

**3.47м.**  $C = 335$  пФ;  $C_{12} = 19,8$  нФ.

**3.48.** а)  $C = 333$  пФ;  $C_{12} = 39,6$  нФ; б)  $C = 335$  пФ;  $C_{12} = 19,8$  нФ;

в)  $C = 341$  пФ;  $C_{12} = 9,89$  нФ.

**3.49м.** а)  $C = 327$  пФ;  $C_{12} = 2,75$  пФ; б)  $C = 324$  пФ;  $C_{12} = 5,5$  пФ;

в)  $C = 319$  пФ;  $C_{12} = 11$  пФ.

**3.51м.**  $C = 15,6$  пФ.

**3.52.** а)  $L_{12} = 20$  мкГн; б)  $L_{12} = 40$  мкГн; в)  $L_{12} = 96,3$  мкГн.

**3.53м.**

A	$\Pi_{f1}$ , кГц	$\Pi_{f2}$ , кГц	$\Pi_{f3}$ , кГц	$\Pi_{f4}$ , кГц
0,5	6,83	10,1	27,8	90,5
1	11,5	15,1	36,2	115
2,41	25,2	29,4	59	179

#### Глава 4

**4.3.**  $-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$ ;  $-\dot{I}_2 + \dot{I}_6 + \dot{I}_7 = 0$ ;  $-\dot{I}_3 - \dot{I}_4 + \dot{I}_5 = 0$ ;  $-\dot{I}_5 - \dot{I}_7 + \dot{I}_8 = 0$ ;  $R_1\dot{I}_1 + R_2\dot{I}_3 + j\dot{I}_4/(\omega C_2) = \dot{E}$ ;  $-j\dot{I}_4/(\omega C_2) + R_4\dot{I}_5 + R_5\dot{I}_8 = 0$ ;  $R_1\dot{I}_1 - j\dot{I}_2/(\omega C_1) - j\dot{I}_7/(\omega C_3) + R_5\dot{I}_8 = \dot{E}$ ;  $R_1\dot{I}_1 - j\dot{I}_2/(\omega C_1) + R_3\dot{I}_6 = \dot{E}$ .

**4.4.**  $-\dot{U}_1/R_1 + j\omega C_1\dot{U}_2 + \dot{U}_3/R_2 = 0$ ;  $-j\omega C_1\dot{U}_2 + \dot{U}_6/R_3 + j\omega C_3\dot{U}_7 = 0$ ;  $-\dot{U}_3/R_2 - j\omega C_2\dot{U}_4 + \dot{U}_5/R_4 = 0$ ;  $-\dot{U}_5/R_4 - j\omega C_3\dot{U}_7 + \dot{U}_8/R_5 = 0$ ;  $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 - \dot{U}_4 = \dot{E}$ ;  $\dot{U}_4 + \dot{U}_5 + \dot{U}_8 = 0$ ;  $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_7 + \dot{U}_8 = \dot{E}$ ;  $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_6 = \dot{E}$ , где  $\dot{U}_1 = \dot{U}_{R1}$ ,  $\dot{U}_2 = \dot{U}_{C1}$  и т.д.

**4.6.** Для системы независимых контуров, соответствующих дереву графа цепи рис. Т4.17, б):  $(Z_1 + Z_2)\dot{I}_{11} + Z_2\dot{I}_{22} + Z_2\dot{I}_{33} + Z_2\dot{I}_{44} = \dot{E}_1$ ;  $Z_2\dot{I}_{11} + (Z_2 + Z_3)\dot{I}_{22} + Z_2\dot{I}_{33} + Z_2\dot{I}_{44} = \dot{E}_1 - \dot{E}_3$ ;  $Z_2\dot{I}_{11} + Z_2\dot{I}_{22} + (Z_2 + Z_4)\dot{I}_{33} + Z_2\dot{I}_{44} = -\dot{E}_2$ ;  $Z_2\dot{I}_{11} + Z_2\dot{I}_{22} + Z_2\dot{I}_{33} + (Z_2 + Z_5)\dot{I}_{44} = -\dot{E}_2 - \dot{E}_3$ , где  $\dot{I}_{11} = \dot{I}_3$ ;  $\dot{I}_{22} = \dot{I}_2$ ;  $\dot{I}_{33} = \dot{I}_6$ ;  $\dot{I}_{44} = \dot{I}_7$ .

**4.9м.**  $(-1/Z_1)\dot{E}_1 + (1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3 + 1/Z_4 + 1/Z_5)\dot{U}_{20} + (1/Z_4)\dot{E}_2 = (-1/Z_3 - 1/Z_5)\dot{E}_3$ .

**4.13м.**  $U_{R1} = 55,6$  мВ;  $U_{R2} = 21,8$  мВ.

**4.14.**  $\dot{U}_{R5} \approx 46e^{j57^\circ}$  мВ;  $P_Q \approx 4$  мквар.

**4.15.**  $Z_{эк1} = 21,4 + j38,1$  кОм;  $Z_{эк2} = 6,59 + j23,1$  кОм.

4.16.  $\dot{U}_{R2} = 10e^{-j2,1^\circ}$  мкВ.

4.17м.  $\dot{U}_{R3} = 4,2e^{j128,4^\circ}$  В.

4.18. а)  $\dot{U}_{10} \approx -7,69$  мВ;  $\dot{U}_{20} = -0,2$  В;  $\dot{U}_{31} \approx 8,69$  мВ;  $R_{\text{эк}} = 2,21$  Ом;  $C_{\text{эк1}} = 8,7$  мкФ; б)  $\dot{U}_{10} = 158e^{-j170,9^\circ}$  мВ;  $\dot{U}_{20} = -0,2$  В;  $\dot{U}_{31} = 159e^{-j9^\circ}$  мВ;  $R_{\text{эк}} = 2,48$  Ом;  $C_{\text{эк1}} = 161$  мкФ.

4.19.  $\dot{U}_{20} = 4,91e^{j79,6^\circ}$  мВ;  $\dot{U}_{30} = 38,5$  мкВ;  $\dot{U}_{23} = 4,9e^{j80,1^\circ}$  мВ;  $\dot{U}_{12} = 4,83e^{-j88,6^\circ}$  мВ;  $R_{\text{эк}} = 517$  Ом;  $C_{\text{эк}} = 197$  мкФ.

4.20.  $\dot{U}_{20} \approx 8,35$  мВ;  $\dot{U}_{50} \approx 1,76$  В;  $R_{\text{эк}} = 13,6$  Ом;  $C_{\text{эк}} = 165$  пФ.

4.22.  $\dot{U}_{30} = 5,18e^{j13,8^\circ}$  мВ.

4.24.  $\dot{I}_3 = 5,34e^{j47,8^\circ}$  А.

4.25м.  $\dot{U}_R = 0,19e^{j64,6^\circ}$  В.

4.26.  $u_C = 40 + 0,447\cos(2 \cdot 10^6 t - 63,4^\circ)$  В.

4.27.  $\dot{I}'_1 = 3,69 - j0,674$  мА;  $\dot{I}'_2 = -3,55 + j0,0792$  мА;  $\dot{I}'_3 = -0,137 + j0,595$  мА;  $\dot{I}''_1 = -5,33 + j0,119$  мА;  $\dot{I}''_2 = 5,31 - j1,18$  мА;  $\dot{I}''_3 = 0,02 - j1,07$  мА;  $\dot{I}_1 = -1,64 - j0,555$  мА;  $\dot{I}_2 = 1,75 - j1,11$  мА;  $\dot{I}_3 = -0,117 + j1,66$  мА;  $\dot{I}_2/\dot{E}_1 = \dot{I}'_1/\dot{E}_2 = -44,4 + j0,99$  мкСм.

4.29.  $\dot{I}_1 = 5$  А;  $\dot{I}_2 = 2,5$  А.

4.32.  $\dot{I}_1 = 7,78$  мА.

4.33.  $R_2 = 500$  Ом;  $P_A = 17,8$  Вт.

4.35.  $\omega_1 = \sqrt{2 + RS/(RC)}$ .

4.36.  $z = 597$  Ом.

4.37. Для рис. Т4.36, а:  $\dot{J}_{\text{эк}} = j\omega C\dot{E}$ ;  $Y_{\text{эк}} = (1/R) + j\omega C$ ; для рис. Т4.36, б -  $\dot{J}_{\text{эк}} = \dot{E}(S + j\omega C)$ ;  $Y_{\text{эк}} = j\omega C$ ; для рис. Т4.36, в -  $\dot{J}_{\text{эк}} = \dot{E}(S + j\omega C)$ ;  $Y_{\text{эк}} = S + j\omega C$ .

4.38м.  $\dot{E}_{\text{эк}} = 10e^{-j2,1^\circ}$  мкВ;  $Z_{\text{эк}} = 49,6e^{-j86,4^\circ}$  Ом.

4.39м.  $\dot{E}_{\text{эк}} = -0,731$  В;  $R_{\text{эк}} = 1,79$  кОм.

4.40. 1)  $x = By$ ;  $y = Ax + Cz$ ; 2)  $x_1 = Ax_0 + Cx_2$ ;  $x_2 = Bx_1 + Ex_3$ ;  $x_3 = Dx_2$ .

4.42.  $\dot{I}_1 = \dot{E}_1/Z_1 - \dot{I}_2Z_2/Z_1$ ;  $\dot{I}_2 = \dot{I}_1 + \dot{I}_3$ ;  $\dot{I}_3 = \dot{E}_2/Z_3 - \dot{I}_2Z_2/Z_3 - \dot{I}_4Z_4/Z_3$ ;  $\dot{I}_4 = \dot{I}_3 + \dot{I}_5$ ;  $\dot{I}_5 = \dot{E}_3/Z_5 - \dot{I}_4Z_4/Z_5 - \dot{I}_6Z_6/Z_5$ ;  $\dot{I}_6 = \dot{I}_5 + \dot{I}_7$ ;  $\dot{I}_7 = \dot{I}_8Z_8/Z_7 - \dot{I}_6Z_6/Z_7$ ;  $\dot{I}_8 = \dot{J} - \dot{I}_7$ .

4.45.  $x_3/x_0 = 8$ ;  $x_1 = 4x_2 + 2x_3 - 2x_0$ ;  $x_2 = 3x_1 - x_3 - x_0$ ;  $x_3 = 7x_1 + 2x_2$ .

4.46м.  $\frac{x_5}{x_0} = \frac{ACFK}{[(1-B)(1-E) - CD - GF(1-B)](1-IJ) - HJFK(1-B)}$ .

4.47.  $\frac{x_4}{x_0} = \frac{AF + (BG + CEG)(1-D)}{1-D - EGH + DEGH}$ .

4.49. 34.

4.50.  $\frac{x_3}{x_0} = \frac{ABD}{1-BC-DE}$ .

$$4.51. \text{ а) } \frac{x_4}{x_0} = \frac{A(1 - DG - J - EI - DHI + DGJ) + BCG(1 - J) + BCHI}{1 - BF - DG - J - EI - DHI + BFJ + BEFI + DGJ};$$

$$\text{ б) } \frac{x_4}{x_0} = \frac{ADH + BEH(1 - C)}{1 - ADFH - BEHF - C - EG + CEG + CBEHF}.$$

$$4.52. x_4 = 16a_1 + 5,25a_2 + 0,5a_3.$$

$$4.53. x_1 = -5; x_2 = -10; x_3 = 0.$$

$$4.55. \dot{I}_3 = [R_3 \dot{E}_1 - (R_1 + R_4) \dot{E}_2] / [(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_2 R_3(1 - SR_1)].$$

$$4.57. \dot{I}_1 = 88,6e^{j180,5^\circ} \text{ мкА.}$$

### Глава 5

$$5.1. i = 95 \text{ мА; } u_1 = 11 \text{ В; } u_2 = 13 \text{ В.}$$

$$5.2. i_1 = 82 \text{ мА; } i_2 = 18 \text{ мА; } u = 7,5 \text{ В.}$$

$$5.3. u_1 = 8,4 \text{ В; } u = 21,6 \text{ В; } i = 108 \text{ мА; } i_1 = 85 \text{ мА; } i_2 = 23 \text{ мА.}$$

$$5.4\text{м. } E = 22 \text{ В; } R_d = 347 \text{ Ом; } u > 10 \text{ В.}$$

$$5.5. E = -8 \text{ В; } R_d = 51 \text{ Ом; } u > 10 \text{ В.}$$

$$5.6. \text{ а) } u_{\text{вых}} = 13 \text{ В; б) } u_{\text{вых}} = 14 \text{ В.}$$

$$5.7\text{м. а) } u_{\text{вых}} = 10,4 \text{ В; б) } u_{\text{вых}} = 10,9 \text{ В.}$$

$$5.8. i_1 = 65 \text{ мА; } i_2 = 5 \text{ мА; } i_3 = 105 \text{ мА; } i_4 = 60 \text{ мА.}$$

$$5.9. i_1 = 90 \text{ мА; } i_2 = 80 \text{ мА; } i_3 = -20 \text{ мА; } i_4 = 10 \text{ мА.}$$

$$5.10. i_1 = 23,3 \text{ мА; } i_2 = -3,3 \text{ мА; } i_3 = 40 \text{ мА.}$$

$$5.11\text{м. а) } R_1 > 699 \text{ Ом; } R_1 < 87 \text{ Ом; б) } 87 \text{ Ом} < R_1 < 699 \text{ Ом.}$$

$$5.12. E_- = 6 \cdot 10^{-3} R_1 + 0,2 \text{ В; } R_1 < 18,3 \text{ Ом. Для } E_- = 0,25 \text{ В } R_1 = 8,3 \text{ Ом.}$$

$$5.14. i_k = 3,7 \text{ мА; } i_0 = 187 \text{ мкА.}$$

$$5.16. \text{ Задача имеет два решения: 1) } R = 1,5 \text{ кОм; } R_1 = 1,2 \text{ кОм; } R_2 = 0,4 \text{ кОм; } E_{1-} = 3 \text{ В; } E_{2-} = 5 \text{ В; 2) } R = 1,5 \text{ кОм; } R_1 = 0,4 \text{ кОм; } R_2 = 1,2 \text{ кОм; } E_{1-} = 5 \text{ В; } E_{2-} = 3 \text{ В.}$$

5.17. 1) ВАХ линейна; 2) ВАХ имеет линейный участок, который расположен на прямой, проходящей через начало координат; 3) касательная к ВАХ в соответствующей точке проходит через начало координат.

$$5.18\text{м. } i = 0,1e^{2,5u} \text{ (мА, В).}$$

$$5.21. a_0 = i_0; a_1 = [-i_0(u_2^2 - u_1^2) + i_1 u_2^2 - i_2 u_1^2]D; a_2 = [i_0(u_2 - u_1) - i_1 u_2 + i_2 u_1]D; D = [u_1 u_2 (u_2 - u_1)]^{-1}.$$

$$5.23\text{м. } \sqrt{y} = 2,2x; y = 4,84x^2.$$

$$5.24. y = 1,94x.$$

$$5.25. a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_0 \sum_{i=0}^n x_i - \sum_{i=0}^n y_i x_i = 0; a_1 \sum_{i=0}^n x_i + a_0(n+1) - \sum_{i=0}^n y_i = 0.$$

$$5.26. y = -35,5 + 15,7x.$$

$$5.27. a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^3 - \sum_{i=0}^n y_i x_i = 0; a_1 \sum_{i=0}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^4 - \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i = 0.$$

$$5.29\text{м. } y = 1,65 + 5,6(\Delta x) + 9(\Delta x)^2.$$

- 5.30.  $R_{\text{сг}} = u/f(u)$ ;  $R_{\text{диф}} = 1/f'(u)$ ;  $R_{\text{диф}}/R_{\text{сг}} = f(u)[uf'(u)]^{-1}$ ;  $f'(u) = di/du$ .
- 5.31.  $R_{\text{сг}} = \varphi(i)/i$ ;  $R_{\text{диф}} = \varphi'(i)$ ;  $R_{\text{диф}}/R_{\text{сг}} = \varphi'(i)i/\varphi(i)$ ;  $\varphi'(i) = du/di$ .
- 5.32.  $f(u) = a_1 u$  ( $a_1 = \text{const}$ ).
- 5.34м.  $U_- = 0$ ;  $U_{m1} = 67,4$  В;  $U_{m2} = 0$ ;  $U_{m3} = 15,5$  В.
- 5.35м. 1. Отклонение в меньшую сторону не выше 5%, если: 1)  $0 < I_m > 0,917$  мА и 2)  $9,75$  мА  $< I_m < 9,80$  мА. 2. Отклонение в большую сторону не выше 5%, если  $9,80$  мА  $< I_m < 9,84$  мА.
- 5.37м.  $y = \frac{2}{3}x$ .
- 5.38.  $i(t) = 0,5a_2 U_m^2(1 + \cos 2\omega t)$ .
- 5.39. а) 0;  $\omega_0$ ;  $3\omega_0$ ; б) 0;  $\omega_0$ ;  $2\omega_0$ ;  $3\omega_0$ .
- 5.40. а) 0;  $\omega_0$ ;  $2\omega_0$ ;  $4\omega_0$ ; б) 0;  $\omega_0$ ;  $2\omega_0$ ;  $3\omega_0$ ;  $4\omega_0$ .
- 5.41.  $a_2 = 0$ .
- 5.42м.  $I_- = 11,2$  мА;  $I_{m1} = 4,4$  мА;  $I_{m2} = 0,4$  мА.
- 5.43.  $I_{m1} = 16U_m$  (мА, В).
- 5.44.  $I_{m1} = 3,52U_m - 0,03U_m^3$  (мА, В).
- 5.45.  $I_{m1} = 15 + 12u_0$  (мА, В).
- 5.46.  $I_- = 40$  мА;  $I_{m1} = 48$  мА;  $I_{m2} = 10$  мА.
- 5.48.  $y = \left| \frac{2}{\pi} \arcsin x \right|$ ;  $-1 \leq x \leq 1$ .
- 5.49.  $I_- = a_0 + 0,5a_2 U_{m1}^2 + 0,5a_2 U_{m2}^2$ ;  $I_{m1}|_{\omega 1} = a_1 U_{m1}$ ;  $I_{m2}|_{\omega 1} = 0,5a_2 U_{m1}^2$ ;  
 $I_{m1}|_{\omega 2} = a_1 U_{m2}$ ;  $I_{m2}|_{\omega 2} = 0,5a_2 U_{m2}^2$ ;  $I_{m1}|_{|\omega 1 - \omega 2|} = I_{m1}|_{|\omega 1 + \omega 2|} = a_2 U_{m1} U_{m2}$ .

### Глава 6

- 6.2.  $\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{1}{\tau} \frac{R_2}{R_1 + R_2} e + \frac{R_3}{R_{12} + R_3} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{de}{dt}$ ;  $R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ ;  
 $\tau = C(R_{12} + R_3)$ .
- 6.3.  $\frac{d^2 i_L}{dt^2} = \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{L} \frac{de}{dt}$ .
- 6.4.  $\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = \frac{1}{LC} e$ .
- 6.5.  $\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R_1 + R_2}{L} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{R_2}{L} \frac{dj}{dt} + \frac{1}{LC} j$ .
- 6.6м.  $\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{1}{RC_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{1}{L_1 C_1 (1 - k^2)} u_1 - \frac{k^2}{MC_1 (1 - k^2)} u_2 = \frac{1}{RC_1} \frac{de}{dt}$ ;  
 $\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{1}{L_2 C_2 (1 - k^2)} u_2 - \frac{k^2}{MC_2 (1 - k^2)} u_1 = 0$ ;  $k^2 = M^2 (L_1 L_2)^{-1}$ .
- 6.7. Для рис. Т6.7, а —  
 $\frac{d^2 u}{dt^2} + \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_2} \right) \frac{du}{dt} + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} u = \frac{1}{R_1 C_2} \frac{de}{dt}$ ;

для рис. Т6.7, б —  $\frac{d^2u}{dt^2} + \left( \frac{R_1}{L_1} + \frac{R_1 + R_2}{L_2} \right) \frac{du}{dt} + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} u = \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} e$ .

**6.8.** Для рис. Т.6.8, а —  $v = 2$ , для рис. Т6.8, б —  $v = 0$ , для рис. Т6.8, в —  $v = 3$ , для рис. Т6.8, з —  $v = 3$ .

**6.10м.**  $u_{C1}(0_-) = J R_2$ ;  $u_{C2}(0_-) = 0$ ;

$u_{C1}(0_+) = u_{C2}(0_+) = J R_2 C_1 (C_1 + C_2)^{-1}$ .

**6.11м.**  $u_{C1}(0_-) = E_{1-}$ ;  $u_{C2}(0_-) = E_{2-}$ ;

$u_{C1}(0_+) = u_{C2}(0_+) = (C_1 E_{1-} + C_2 E_{2-})(C_1 + C_2)^{-1}$ ;

$u_{C1}(\infty) = u_{C2}(\infty) = (E_{1-} R_2 + E_{2-} R_1)(R_1 + R_2)^{-1}$ .

**6.12м.**  $u_{C1}(0_-) = u_{C2}(0_-) = 0$ ;

$u_{C1}(0_+) = E_- C_2 (C_1 + C_2)^{-1}$ ;  $u_{C2}(0_+) = E_- C_1 (C_1 + C_2)^{-1}$ ;

$u_{C1}(\infty) = E_- R_1 (R_1 + R_2)^{-1}$ ;  $u_{C2}(\infty) = E_- R_2 (R_1 + R_2)^{-1}$ .

**6.14.**  $i(0_-) = \frac{E_-}{R_1}$ ;  $i_2(0_-) = \frac{E_-}{R_2}$ ;  $i_1(0_+) = -i_2(0_+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{E_-}{R_1} - \frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{E_-}{R_2}$ .

**6.15м.**  $i_1(0_-) = \frac{E_-}{R_1}$ ;  $i_2(0_-) = 0$ ;  $i_1(0_+) = i_2(0_+) = \frac{L_1 + M}{L_1 + L_2 + 2MR_1} \frac{E_-}{R_1}$ .

**6.17.**  $u_C = 5e^{-10^6 t}$  В.

**6.18.**  $t_1 = RC \ln N$ .

**6.19.**  $P_{cp} = \frac{U_0^2}{2R} \frac{N^2 - 1}{N^2 \ln N}$ .

**6.20.**  $R_y = 1,56 \cdot 10^9$  Ом.

**6.22м.**  $R = 250$  Ом;  $L = 450$  мГн.

**6.23.** Для  $t = 0$ :  $i_{R_1} = i_{R_2} = 0,5$  мА;  $i_C = 0$ ;  $u_C = 7,5$  В; для  $t = 0_+$ :  $i_{R_1} = 2,5$  мА;  $i_{R_2} = 0,5$  мА;  $i_C = 2$  мА;  $u_C = 7,5$  В; для  $t \rightarrow \infty$ :  $i_{R_1} = i_{R_2} = 1$  мА;  $i_C = 0$ ;  $u_C = 15$  В.

**6.24.** Для  $t = 0$ :  $i_L = 3$  мА;  $i_R = 0$ ;  $u_R = 0$ ; для  $t = 0_+$ :  $i_L = 3$  мА;  $i_R = -2$  мА;  $u_R = -6$  В; для  $t \rightarrow \infty$ :  $i_L = 1$  мА;  $i_R = 0$ ;  $u_R = 0$ .

**6.26.**  $\omega_{св} \approx \omega_0 = 1 \cdot 10^5$  рад/с;  $\theta = 31,4 \cdot 10^{-3}$ .

**6.28.** а) 22; б) 51; в) 73; г) 95.

**6.29м.**  $R = 70$  Ом;  $L = 200$  мкГн;  $C = 506$  пФ.

**6.31.**  $u(t) = 1,74(e^{-157t} - e^{-1593t})$  В.

**6.32.**  $u(t) = 2 + 0,667e^{-2 \cdot 10^3 t} - 2,67e^{-500t}$  В.

**6.37м.** а)  $a/(p^2 - a^2)$ ; б)  $p/(p^2 - a^2)$ ; в)  $a/(p^2 + a^2)$ ; г)  $p/(p^2 + a^2)$ ;

д)  $\frac{a}{p(p+a)}$ ; е)  $\frac{a-b}{(p+a)(p+b)}$ ; ж)  $\frac{p \sin \varphi - b \cos \varphi}{p^2 + b^2}$ ; з)  $\frac{p \cos \varphi - b \sin \varphi}{p^2 + b^2}$ .

**6.38.** а)  $\frac{a}{(p+b)^2 - a^2}$ ; б)  $\frac{p+b}{(p+b)^2 - a^2}$ ; в)  $\frac{a}{(p+b)^2 + a^2}$ ;

г)  $\frac{(p+b) \cos \varphi - a \sin \varphi}{(p+b)^2 + a^2}$ .

**6.39м.** а)  $f(0) = 1$ ;  $f(\infty) = 0$ ; б)  $f(0) = 0$ ;  $f(\infty) = 0$ ; в)  $f(0) = 0$ ;  $f(\infty) = 1/a$ ; г)  $f(0) = 1$ ;  $f(\infty) = b/a$ .

6.40. а)  $\frac{1}{2}(1 - 4e^{-t} + 5e^{-2t})$ ; б)  $\frac{1}{12}(e^{-2t} + 8e^t - 6t - 9)$ .

6.41. а)  $1 - \cos t$ ; б)  $\frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t)$ .

6.42м.  $Z(p) = 10^3(p + 250)p^{-1}$  Ом.

6.43м.  $Z(p) = 4p + 2 \cdot 10^3$  Ом.

6.44м.  $K(p) = 250(p + 250)p^{-1}$ .

6.45м.  $Z(p) = 0,199 \cdot 10^{-3}(p^2 + 0,35 \cdot 10^6 p + 9,9 \cdot 10^{12})p^{-1}$  Ом.

6.51м.  $\alpha_0 = \arctg \omega RC \pm \pi/2$ ;  $\alpha_{01} = 2,83$  рад;  $\alpha_{02} = -0,308$  рад.

6.52м.  $u_C(t) = 3,03 \cos(2\pi \cdot 10^5 t + \alpha - 1,26) + [2 - 3,03 \cos(\alpha - 1,26)] \times e^{-2 \cdot 10^5 t}$  В;  $\alpha_0 = \arctg \omega RC \pm \arccos U_0/U_{Cm}$ ;  $U_{Cm} = E[1 + (\omega RC)^2]^{-1/2}$ ;  $\alpha_{01} = 2,11$  рад;  $\alpha_{02} = 0,412$  рад.

6.53м.  $U_0 > E[1 + (\omega RC)^2]^{-1/2}$ ;  $U_0 > 3,03$  В.

6.54м, 6.56.  $R > \frac{1}{2}\sqrt{L/C}$ ;  $\omega_{св} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}$ .

6.57м. Для цепи (см. рис. Т6.32)  $R > \frac{1}{2}\sqrt{L/C}$ ;  $\omega_{св} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}$ ;

для цепи (см. рис. Т6.33)  $R > 2\sqrt{L/C}$ ;  $\omega_{св} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2L}\right)^2}$ .

6.60. а)  $\frac{A(1 - e^{-pt_n})}{p(1 - e^{-pT})}$ ; б)  $\frac{A[1 - e^{-\left(p + \frac{1}{\tau}\right)t_n}]}{\left(p + \frac{1}{\tau}\right)(1 - e^{-pT})}$ ; в)  $\frac{\pi A(1 + e^{-pt_n})}{t_n \left[ p^2 + \left(\frac{\pi}{t_n}\right)^2 \right] (1 - e^{-pT})}$ ;

г)  $\frac{A[1 - (pt_n + 1)e^{-pt_n}]}{t_n p^2 (1 - e^{-pT})}$ ; д)  $\frac{A(pt_n - 1 + e^{-pt_n})}{t_n (1 - e^{-pT})}$ ; е)  $\frac{2A(1 - e^{-pt_n/2})^2}{t_n p^2 (1 - e^{-pT})}$ ;

ж)  $\frac{A(1 - e^{-pt_1} - pt_1 e^{-pt_1})}{t_1 p^2 (1 - e^{-pT})}$ .

6.61.  $\frac{\omega_1 A}{p^2 + \omega_1^2} \operatorname{ch} \frac{p\pi}{2\omega_1}$ .

6.62.  $a[p(1 - e^{-p\tau})]^{-1} = \frac{a}{2p} \left[ 1 + \operatorname{ch} \frac{p\tau}{2} \right]$ .

6.63м. Для рис. Т6.36,  $a - \frac{A}{p} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}$ , для рис. Т6.36, б)  $-\frac{2A(1 - e^{-pt_n/2})^2}{t_n p^2 (1 + e^{-pt_n})}$ .

6.65м.  $u_2(t) = f(t) = \frac{E\tau}{T} \left[ e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau} - 1 \right]$  при  $0 \leq t < T$ ,  $\tau = RC$ ;  $u_2(t) = f(t) - E[1 - e^{-(t-T)/\tau}]$  при  $T \leq t < 2T$ ;  $u_2(t) = f(t) - E \sum_{n=1}^N [1 - e^{-(t-nT)/\tau}]$

при  $NT \leq t < (N+1)T$ .

**6.66м.**  $u_2(t) = f(t) = \frac{E\tau}{T}(1 - e^{t/\tau})$  при  $0 \leq t < T$ ,  $\tau = RC$ ;  $u_2(t) = f(t) - 2f(t - T)$  при  $T \leq t < 2T$ ;  $u_2(t) = f(t) - 2f(t - T) + f(t - 2T)$  при  $t \geq 2T$ .

**6.67м.**  $u_C(t) = E \left[ 1 - \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} \right]$  при  $0 \leq t < t_{н}$ ;

$u_C(t) = E \left[ \cos \frac{t - t_{н}}{\sqrt{LC}} - \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} \right]$  при  $t \geq t_{н}$ ;

$u_C(t) = 0$  при  $t > t_{н}$ , если  $t_{н} = 2\pi k \sqrt{LC}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ).

**6.68м.**  $u_C(t) = I_0 \sqrt{L/C} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}$  при  $0 \leq t < t_{н}$ ;

$u_C(t) = I_0 \sqrt{\frac{L}{C}} \left[ \sin \frac{t}{\sqrt{LC}} - \sin \frac{t - t_{н}}{\sqrt{LC}} \right]$  при  $t \geq t_{н}$ ;  $u_C(t) = 0$  при  $t > t_{н}$ ,

если  $t_{н} = 2\pi k \sqrt{LC}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ).

**6.70.**  $u_L = u - Ri$ ;  $u_L = E \frac{1 - e^{-(T-t_{н})/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} e^{-t/\tau}$  при  $0 \leq t < t_{н}$ ;

$u_L = -E \frac{1 - e^{-t_{н}/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} e^{-(t-t_{н})/\tau}$  при  $t_{н} \leq t < T$ .

**6.71м.**  $u_C = E \left[ 1 - \frac{1 - e^{-(T-t_{н})/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} e^{-t/\tau} \right]$  при  $0 \leq t < t_{н}$ ;

$u_C = E(1 - e^{-t_{н}/\tau})(1 - e^{-T/\tau})^{-1} e^{-(t-t_{н})/\tau}$  при  $t_{н} \leq t < T$ .

**6.73.**  $f(t) = t^3[1(t) - 1(t-1)] + (t^2 + 3) \cdot 1(t-1)$ .

**6.74.**  $f'(t) = 3t^2[1(t) - 1(t-1)] + 2t \cdot 1(t-1) + 3\delta(t-1)$ .

**6.75.** Для рис. Т6.34, а —  $f(t) = A[1(t) - 1(t-t_{н})]$ ; для рис. Т6.34, б —

$f(t) = Ae^{-t/\tau}[1(t) - 1(t-t_{н})]$ ; для рис. Т6.34, в —  $f(t) = \left[ A \sin \frac{\pi t}{t_{н}} \right] \times$

$\times [1(t) - 1(t-t_{н})]$ ; для рис. Т6.34, з —  $f(t) = \frac{A}{t_{н}} t [1(t) - 1(t-t_{н})]$ ;

для рис. Т6.34, д —  $f(t) = \frac{A(t_{н} - t)}{t_{н}} [1(t) - 1(t-t_{н})]$ .

**6.76.**  $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$ .

**6.77.**  $\delta(t_0 - t) = \delta(t - t_0)$ ;  $1(t_0 - t) = 1(t - t_0)$ .

**6.78м.** а)  $5\delta(t - 0,1)$ ; б)  $\alpha e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$ ; в)  $1(t) \cdot 2\omega \cos \omega t$ ; г)  $\delta(t) - \alpha e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$ ; д)  $2\delta(t) - 1(t) \cdot 2\omega \sin \omega t$ .

**6.79м.** а)  $-4\delta(t + 2)$ ; б)  $27\delta(t + 5)$ ; в)  $4\delta(t - 3)$ .

**6.80м.** а)  $\theta$ ; б) 9; в) 0; г)  $5 \cdot 1(t - 5)$ .

**6.81м.**  $\text{sign } t = 2 \cdot 1(t) - 1$ .

**6.82м.**  $f'(t) = \text{sign } t$ ;  $f''(t) = 2\delta(t)$ .

**6.83м.**  $(t + |t|)/2$ .

**6.84м.**  $-f'(a)$ .

6.89м. а)  $e^{-pa}$ ; б)  $p$ ; в)  $pe^{-pa}$ ; г)  $p^n e^{-pa}$ .

$$6.91. g(t) = \frac{1}{R} e^{-t/(RC)} = 10^{-3} e^{-10^3 t} \text{ CM}; h(t) = \frac{1}{R} \delta(t) - \frac{1}{R^2 C} e^{-t/(RC)} = \\ = 10^{-3} \delta(t) - e^{-10^3 t} \text{ CM/c.}$$

$$6.93. g(t) = 1,17e^{-1309t} - 0,17e^{-191t}; \\ h(t) = \delta(t) - 1532e^{-1309t} + 32,5e^{-191t} \text{ c}^{-1}.$$

$$6.94. g(t) = 0,447(e^{-191t} - e^{-1309t}); h(t) = -85,4e^{-191t} + 585e^{-1309t} \text{ c}^{-1}.$$

$$6.95м. g(t) = 1 - e^{-10^3 t} - e^{-500t}; h(t) = -\delta(t) + 10^3 e^{-10^3 t} + 500e^{-500t} \text{ c}^{-1}.$$

$$6.96. g(t) = -1 + e^{-10^3 t} - e^{-500t}; h(t) = \delta(t) - 10^3 e^{-10^3 t} - 500e^{-500t} \text{ c}^{-1}.$$

$$6.97. g(t) = 1 - e^{-10^3 t} - e^{-2 \cdot 10^3 t}; \\ h(t) = -\delta(t) + 10^3 e^{-10^3 t} + 2 \cdot 10^3 e^{-2 \cdot 10^3 t} \text{ c}^{-1}.$$

$$6.98м. g(t) = 1 - e^{-10^3 t}.$$

$$6.99. g(t) = 1 \cdot e^{-250t}.$$

$$6.100. g(t) = \frac{1}{\beta RC} e^{-\alpha t} \sin \beta t; h(t) = \frac{\omega_0}{\beta RC} e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi); \alpha = \frac{1}{\beta RC};$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}; \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \varphi = -\arctg \frac{\alpha}{\beta}.$$

$$6.101. g(t) = \frac{1}{RC} e^{-\alpha t}; \alpha = \frac{1}{2RC}; h(t) = \frac{1 - \alpha t}{RC} e^{-\alpha t}; t_0 = \frac{1}{\alpha} = 2RC;$$

$$g(t_0) = 0,736.$$

$$6.102м. а) g(t) = \frac{1}{R} \cdot 1(t); h(t) = \frac{1}{R} \delta(t); б) g(t) = 1 - 2e^{-t/\tau}; \tau = RC;$$

$$h(t) = -\delta(t) + \frac{2}{\tau} e^{-t/\tau}.$$

$$6.103м. а) g(t) = \frac{1}{R} \cdot 1(t); h(t) = \frac{1}{R} \delta(t); б) g(t) = 1 - 2e^{-t/\tau} - 1; \tau = RC;$$

$$h(t) = \delta(t) - \frac{2}{\tau} e^{-t/\tau}.$$

$$6.107. i(t) = 0,2(e^{-500t} - e^{-10^3 t}) \text{ A при } t \geq 0.$$

$$6.109. u_2(t) = \frac{E}{1 - \alpha \tau} (e^{-\alpha t} - e^{-t/\tau}); \tau = L/R.$$

$$6.113. u_2(t) = 1 + \left[ \frac{1}{\xi^2 + 1} + \frac{1}{(2\xi)^2 + 1} - 1 \right] \cos \omega_0 t + \\ + \left[ \frac{1}{\xi^2 + 1} + \frac{1}{(2\xi)^2 + 1} \right] \sin \omega_0 t - \left[ 1 + \frac{1}{\xi^2 + 1} \right] e^{-t/\tau} - \left[ 1 + \frac{1}{(2\xi)^2 + 1} \right] e^{-t/2\tau}; \\ \xi = \omega_0 \tau.$$

## Глава 7

$$7.1. Y_{11}^{(2)} = Y_{11}^{(3)}; Y_{12}^{(2)} = -(Y_{11}^{(3)} + Y_{12}^{(3)}); Y_{21}^{(2)} = -(Y_{11}^{(3)} + Y_{21}^{(3)}); Y_{22}^{(2)} = \\ = Y_{11}^{(3)} + Y_{12}^{(3)} + Y_{21}^{(3)} + Y_{22}^{(3)}.$$

**7.2.**  $K_a = -Y_{21}^{(3)}(Y_{22}^{(3)} + Y_n)^{-1}$ ;  $K_6 = Y_{21}^{(3)}(Y_{21}^{(3)} + Y_{22}^{(3)} + Y_n)^{-1}$ ;  $K_6 = -K_a(1 - K_a)^{-1}$ ; при  $|K_a| \gg 1$   $K_6 \approx 1$ .

**7.5.** Комплексная схема замещения цепи соответствует рис. Т7.2 (см. задачу 7.3р), если принять  $Z_1 = R_1 + j\omega L'_1$ ;  $Z_2 = R_3 + j\omega L'_3$ ;  $Z_3 = R_2 + j\omega L_2$ , где  $L'_1 = L_1 + M_{23} - M_{12} - M_{13}$ ;  $L_2 = L_2 + M_{13} - M_{12} - M_{23}$ ;  $L'_3 = L_3 + M_{12} - M_{13} - M_{23}$ . Матрица  $Y_{ij}$  цепи приведена в решении задачи 7.3р.

**7.12.**  $H_{11} = 0$ ;  $H_{12} = 1$ ;  $H_{21} = -1$ ;  $H_{22} = Z^{-1}$ .

**7.13.**  $Z_{11} = Z_{12} = Z_{21} = Z_{22} = Z$ .

**7.14.** Для рис. Т7.13 —  $A_{11} = 1$ ;  $A_{12} = Z$ ;  $A_{21} = 0$ ;  $A_{22} = 1$ ; для рис. Т7.14, а —  $A_{11} = A_{22} = 1$ ;  $A_{12} = A_{21} = 0$ ; для рис. Т7.14, б —  $A_{11} = A_{22} = -1$ ;  $A_{12} = A_{21} = 0$ .

**7.15м.** Для рис. Т7.15, а —  $Z_{11} = j\omega L_1$ ;  $Z_2 = j\omega L_2$ ;  $Z_{12} = Z_{21} = j\omega M$ ; для рис. Т7.15, б —  $Z_{11} = j\omega L_1$ ;  $Z_{22} = j\omega L_2$ ;  $Z_{12} = Z_{21} = -j\omega M$ .

**7.17.** Для рис. Т7.17, а —  $A_{11} = 1 + Z_1 Z_2^{-1}$ ;  $A_{12} = Z_1 + Z_3 + Z_1 Z_3 Z_2^{-1}$ ;  $A_{21} = Z_2^{-1}$ ;  $A_{22} = 1 + Z_3 Z_2^{-1}$ ; для рис. Т7.17, б —  $A_{11} = 1 + Z_1 Z_2^{-1}$ ;  $A_{12} = Z_1 + Z_3 + Z_1 Z_3 Z_2^{-1}$ ;  $A_{21} = Z_2^{-1}$ ;  $A_{22} = 1 + Z_3 Z_2^{-1}$ ; для рис. Т7.17, в —  $A_{11} = 1 + Z_2 Z_3^{-1}$ ;  $A_{12} = Z_2$ ;  $A_{21} = (Z_1 + Z_2 + Z_3)(Z_1 Z_3)^{-1}$ ;  $A_{22} = 1 + Z_2 Z_1^{-1}$ .

**7.18м.**  $Z_{1T} = Z_1$ ;  $Z_{2T} = 0,5(Z_2 - Z_1)$ .

**7.19.**  $A_{11} = A_{22} = (Z_2 + Z_1)(Z_2 - Z_1)^{-1}$ ;  $A_{12} = 2Z_1 Z_2 (Z_2 - Z_1)^{-1}$ ;  $A_{21} = 2(Z_2 - Z_1)^{-1}$ .

**7.24м.**  $Z_{11} = Z_{н1} \dot{U}_1 (\dot{U}_3 - \dot{U}_1)^{-1}|_{i_2=0}$ ;  $Z_{21} = Z_{н1} \dot{U}_2 (\dot{U}_3 - \dot{U}_1)^{-1}|_{i_2=0}$ ;  $Z_{12} = Z_{н2} \left[ -\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} + \frac{Z_{11}}{Z_{н1}} \left( \frac{\dot{U}_3 - \dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right) \right]_{i_2 \neq 0}$ ;  $Z_{22} = Z_{н2} \left[ -1 + \frac{Z_{21}}{Z_{н1}} \left( \frac{\dot{U}_3 - \dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right) \right]_{i_2 \neq 0}$ .

**7.25.**  $\dot{U}_2 = 1,16$  В.

**7.26.** Матрица А-параметров отличается от исходной тем, что параметры  $A_{11}$  и  $A_{22}$  поменялись местами.

**7.28.**  $Y_{11} = Y_1(Y_2 + Y_3)S + Y_4$ ;  $Y_{12} = Y_{21} = -Y_1 Y_2 S - Y_4$ ;

$Y_{22} = Y_2(Y_1 + Y_3)S + Y_4$ ;  $S = (Y_1 + Y_2 + Y_3)^{-1}$ .

**7.29.**  $Z_{11} = Z_3 + Z_1(Z_2 + Z_4)D$ ;  $Z_{12} = Z_{21} = Z_3 + Z_1 Z_2 D$ ;

$Z_{22} = Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_4)D$ ;  $D = (Z_1 + Z_2 + Z_4)^{-1}$ .

**7.30.**  $Y_{11} = Y_1(Y_2 + Y_3)S + Y'_1(Y'_2 + Y'_3)S_1$ ;  $Y_{12} = Y_{21} = -Y_1 Y_2 S - Y'_1 Y'_2 S_1$ ;

$Y_{22} = Y_2(Y_1 + Y_3)S + Y'_2(Y'_1 + Y'_3)S_1$ ;  $S = (Y_1 + Y_2 + Y_3)^{-1}$ ;

$S_1 = (Y'_1 + Y'_2 + Y'_3)^{-1}$ .

**7.31.**  $A_{11} = (1 + Z_1 Y_2)(1 + Z_3 Y_4) + Z_1 Y_4$ ;  $A_{12} = (1 + Z_1 Y_2)Z_3 + Z_1$ ;

$A_{21} = Y_4 + Y_2(1 + Z_3 Y_4)$ ;  $A_{22} = 1 + Z_3 Y_2$ .

**7.32.** При встречном каскадном соединении таких четырехполюсников (выход первого четырехполюсника соединен с выходом второго) получается симметричный четырехполюсник.

**7.33.** В общем случае — нет. Составной пассивный четырехполюсник симметричен, если  $A_{12A} A_{21B} = A_{21A} A_{12B}$ .

**7.34м.**  $Z_{11} = Z_1 + Z_{12}$ ;  $Z_{12} = Z_{21} = Z_2 + Z_6 + Z_4 Z_5 (Z_4 + Z_5)^{-1}$ ;  $Z_{22} = Z_3 + Z_{12}$ .

**7.35м.**  $Y_{11} = Y_1 + Y_4 + Y_5 + Y_6$ ;  $Y_{12} = Y_{21} = -(Y_4 + Y_6)$ ;  $Y_{22} = Y_3 + Y_4 + Y_6 + Y_7$ .

**7.37м.**  $Z_{11B} = Z_{11A} + j\omega L_1 - (j\omega M - Z_{12A})^2 (Z_{22A} + j\omega L_2)^{-1}$ ;  $Z_{12B} = Z_{21B} = j\omega (L_2 Z_{12A} + M Z_{22A}) (Z_{22A} + j\omega L_2)^{-1}$ ;  $Z_{22B} = j\omega L_2 Z_{22A} (Z_{22A} + j\omega L_2)^{-1}$ .

**7.38м.** Оба четырехполюсника неавтономны.

**7.40.**  $Z_{11} - Z_{12} = Z_3$ ;  $Z_{12} = Z_2$ ;  $Z_{22} - Z_{12} = Z_1$ ;  $\dot{E}_{1x} = \dot{E}_3 - \dot{E}_2$ ;  $\dot{E}_{2x} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2$ . Условие неавтономности:  $\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = \dot{E}_3$ .

**7.41.**  $Y_{11} + Y_{12} = Z_1^{-1}$ ;  $-Y_{12} = -Y_{21} = Z_2^{-1}$ ;  $Y_{22} + Y_{12} = Z_3^{-1}$ ;

$\dot{J}_{1к} = \dot{E}_1 Z_1^{-1} - \dot{E}_2 Z_2^{-1}$ ;  $\dot{J}_{2к} = \dot{E}_2 Z_2^{-1} - \dot{E}_3 Z_3^{-1}$ .

Условие неавтономности:  $\dot{E}_1 Z_1^{-1} = \dot{E}_2 Z_2^{-1} = \dot{E}_3 Z_3^{-1}$ .

**7.42.**  $\dot{U}_2 = 1,72e^{j0,6}$  В.

**7.43.**  $\dot{U}_1/\dot{I}_1 = (0,821 + j0,240)$  Ом. При  $\dot{E} = 0$   $Z_{11}(j\omega) = 2,1$  Ом.

**7.45.**  $\dot{E}_{1x} = -\dot{J}_{1к} Y_{22} S + \dot{J}_{2к} Y_{22} S$ ;  $\dot{E}_{2x} = \dot{J}_{1к} Y_{21} S - \dot{J}_{2к} Y_{11} S$ ;  $Z_{11} = Y_{22} S$ ;  $Z_{12} = -Y_{12} S$ ;  $Z_{21} = -Y_{21} S$ ;  $Z_{22} = Y_{11} S$ ;  $S = (\Delta_Y)^{-1} = (Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21})^{-1}$ .

**7.49.**  $\dot{U}_1 = A_{11} \dot{U}_2 + A_{12} \dot{I}_2 + A_{12} \dot{J}_{2к}$ ;  $\dot{I}_1 = A_{21} \dot{U}_2 + A_{22} \dot{I}_2 + A_{22} \dot{J}_{2к} + \dot{J}_{1к}$ ;

$\dot{I}_2 = -\dot{I}_2$ ;  $A_{11} = -Y_{22} Y_{21}^{-1}$ ;  $A_{12} = -Y_{21}^{-1}$ ;  $A_{22} = -Y_{11} Y_{21}^{-1}$ ;

$A_{21} = -(Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}) Y_{21}^{-1}$ .

**7.52.** а) 1,12; б) 1,41; в) 0,944; г) 2,72; д) 0,316; е) 12,2; ж) 20.

**7.53.**  $A = 1,53$  Нп;  $B = 1,14$  рад.

**7.54.**  $Z_C = \sqrt{Z_1 Z_2}$ ;  $\Gamma = \text{arch}[(Z_2 + Z_1)(Z_2 - Z_2)^{-1}]$ .

**7.56.**  $Z_1 = Z_C \text{sh} \Gamma = (967 + j332)$  Ом;

$Z_2 = Z_C \text{ch}(\Gamma/2) = (166 - j1006)$  Ом.

**7.58м.**  $A_{11} = A_{22} = \text{ch} 2\Gamma$ ;  $A_{12} = Z_C \text{sh} 2\Gamma$ ;  $A_{21} = Z_C^{-1} \text{sh} 2\Gamma$ .

**7.60.**  $Z_{11}(j\omega) = (Y_{22} + Y_{n2})(\Delta_Y + Y_{11} Y_{n2})^{-1}$ ;  $K_{21}(j\omega) = -Y_{21}(Y_{22} + Y_{n2})^{-1}$ ;

$K_p(j\omega) = -Y_{21} Y_{n1} [(Y_{11} + Y_{n1})(Y_{22} + Y_{n2}) - Y_{12} Y_{21}]^{-1}$ ;  $G_{21}(j\omega) = Y_{21} Y_{n2} (\Delta_Y + Y_{11} Y_{n2})^{-1}$ ;  $Z_{22}(j\omega) = (Y_{11} + Y_{n1})(\Delta_Y + Y_{22} Y_{n1})^{-1}$ ;  $\Delta_Y = Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}$ .

**7.62.**  $\psi_{21}(\omega) = -\arccos(U_2/U_1) = -1,22$  рад.

**7.63.**  $K_{21x}(j\omega) = \left[ \left[ 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} \right] + j \left[ \omega R_1 C_2 - \frac{1}{\omega R_2 C_1} \right] \right]^{-1}$ . АЧХ

и ФЧХ комплексного коэффициента передачи цепи по напряжению  $K_{21x}(j\omega)$  приведены на рис. О.3, а, б.

**7.64м.** АЧХ и ФЧХ для цепи рис. Т7.48, б приведены на рис. Т7.56, а, б; для цепей рис. Т7.48, в, д — на рис. О.4, а, б; для цепи рис. Т7.48, з — на рис. О.4, в, з.

**7.67.**  $K_{21x}(j\omega) = -[1 + 2(\omega RC)^2][1 - 2(\omega RC)^2 + j3\omega RC]^{-1}$ . АЧХ и ФЧХ комплексного коэффициента передачи цепи по напряжению  $K_{21x}(j\omega)$  приведены на рис. О.5, а, б.

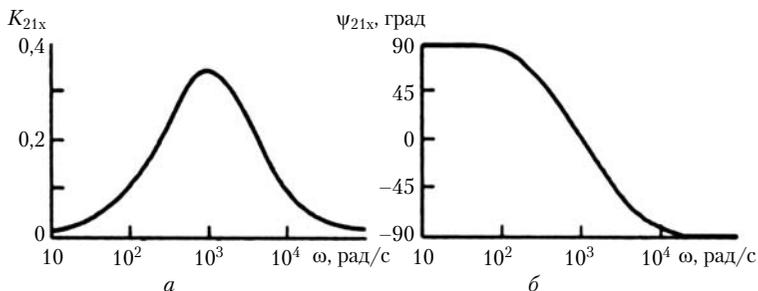


Рис. 0.3

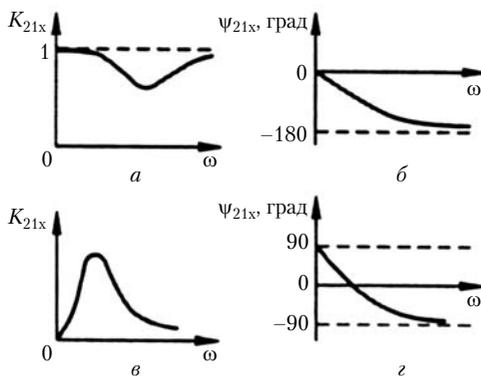


Рис. 0.4

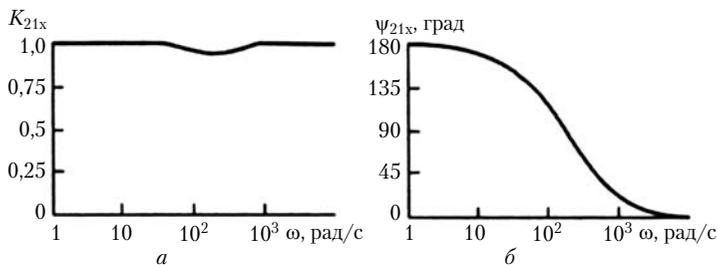


Рис. 0.5

**7.68.**  $K_{21x}(j\omega) = [1 - (\omega RC)^2 + j3\omega RC]^{-1}$ . АЧХ и ФЧХ комплексного коэффициента передачи цепи по напряжению  $K_{21x}(j\omega)$  приведены на рис. 0.6, а, б.

**7.69.**  $Z_{11x}(j\omega) = R[(1 - \omega^2 LC) + j\omega(RC + L/R)][1 - \omega^2 LC + j\omega RC]^{-1}$ . АЧХ и ФЧХ комплексного входного сопротивления  $Z_{11x}(j\omega)$  приведены на рис. 0.7, а, б.

**7.70.**  $Z_{11x}(j\omega) = R[(1 - 2\omega^2 LC) + j\omega(RC + L/R)][1 - \omega^2 LC + j\omega RC]^{-1}$ .

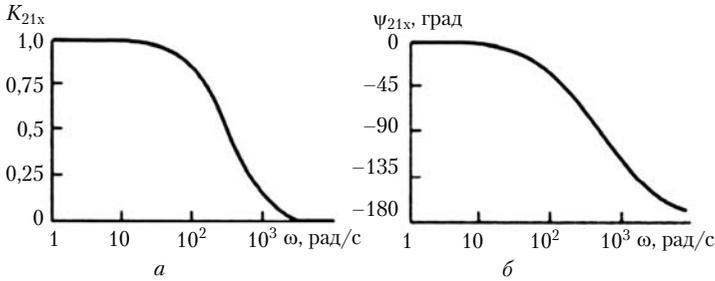


Рис. 0.6

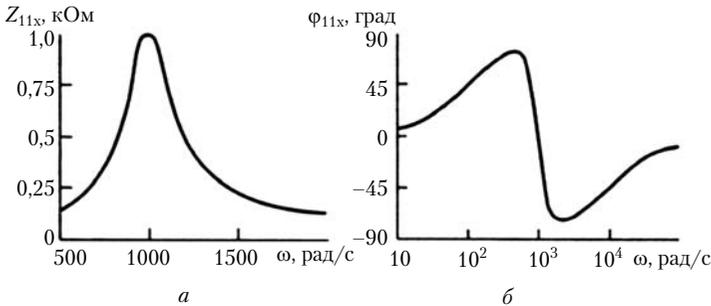


Рис. 0.7

**7.71м.** АЧХ и ФЧХ комплексного входного сопротивления  $Z_{11x}(j\omega)$  для цепей (см. рис. Т7.48, б, в) приведены на рис. Т.7.59, а и б; для цепи (см. рис. Т7.48, г) — на рис. О.8, а, б; для цепи (см. рис. Т7.48, д) — на рис. О.7, а, б.

**7.72.**  $Z_2Z_3 - Z_1Z_4 = 0$ . Условие баланса моста остается справедливым при произвольной нагрузке четырехполюсника.

**7.73.**  $Z_{11}(j\omega) = [Z_1Z_2 + 0,5R(Z_1 + Z_2)][0,5(Z_1 + Z_2) + R]^{-1}$ . Если  $Z_1Z_2 = R^2$ , то  $Z_{11}(j\omega) = R$ .

**7.74м.** Для рис. Т7.60, а —  $Y_{12} = -Y_2$ ;  $Y_{21} = S - Y_2$ , т.е. при  $S \neq 0$ ,  $Y_{12} \neq Y_{21}$ ; для рис. Т7.60, б —  $Z_{12} = Z_2$ ;  $Z_{21} = Z_2 + \alpha Z_3$ , т.е. при  $\alpha \neq 0$ ,  $Z_{12} \neq Z_{21}$ .

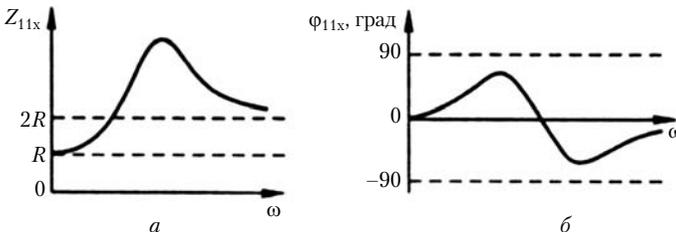


Рис. 0.8

**7.75.** Четырехполосники являются взаимными, если  $\alpha_1 = \alpha_2$  (для четырехполосника на рис. Т7.61, а) или  $\beta_1 = \beta_2$  (для четырехполосника на рис. Т7.61, б).

**7.76.** Для линейного взаимного четырехполосника должно выполняться условие  $\dot{E}_1/\dot{I}_1 = \dot{E}_2/\dot{I}_2$ . Если  $\dot{I}_2 = \dot{E}_2\dot{I}_1/\dot{E}_1 = 4e^{j30^\circ}$  мА, то четырехполосник является взаимным.

$$7.78. \frac{u_{\text{вых}}}{u_{\text{вх}}} = \mu_1\mu_2\mu_3 \frac{R_1}{R_0 + R_1} \frac{R_3}{R_2 + R_3} \frac{R_5}{R_4 + R_5} \frac{R_7}{R_6 + R_7}.$$

**7.79.**  $u_1/i_1 = (1 - K)R$ ;  $u_1/i_1 < 0$  при  $K > 1$ .

**7.80.**  $C_{\text{эк}} = C(1 - K)$ ;  $C_{\text{эк}} > C$ , если  $K < 0$ , т.е. усилитель является инвертирующим. В этом случае цепь осуществляет умножение емкости.

$$7.81. u_{\text{вых}} = -\int_0^t \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k C} u_k(\tau) \right) d\tau + u_C(0).$$

$$7.82. u_2 = -\alpha E_-/2.$$

$$7.83\text{м. } Z_{11}(j\omega) = R_1 R_2 / Z_{H2}.$$

$$7.84\text{м. } Z_{11}(j\omega) = (1 - k)Z_{H2}; Z_{11}(j\omega) < 0 \text{ при } k > 1.$$

$$7.85\text{м. } Z_{11}(j\omega) = Z_H / (1 - k); Z_{11}(j\omega) < 0 \text{ при } k > 1.$$

**7.86.**  $L_{\text{эк}} = CR^2$ . Цепь можно использовать для имитации индуктивности.

$$7.87. L_{\text{эк}} = CR^2.$$

$$7.88. L_{\text{эк}} = C/(g_1 g_2).$$

$$7.89. K_{21}(j\omega) = \frac{-j\omega K_{\text{инв}} C_2 Y_{21}}{(j\omega)^2 C_1 C_2 K_{\text{инв}} + j\omega K_{\text{инв}} C_2 Y_{22} + 1}.$$

$$7.91. K_{21}(j\omega) = -Z_5 [Z_1 + Z_3 + Z_1 Z_3 / Z_2]^{-1}.$$

**7.92.**  $K_{21}(j\omega) = -Y_{21}^A / Y_{21}^B$  (верхний индекс указывает на принадлежность параметра соответствующему четырехполоснику).

$$7.94. L = R_H / (2\omega_c) = 50 \text{ мГн}; C = 1 / (2\omega_c R_H) = 0,05 \text{ мкФ}.$$

$$7.95. u_2(t) = 2\cos(0,5 \cdot 10^4 t - 1,05) + 0,292\cos(1,5 \cdot 10^4 t - \pi) \text{ В}.$$

$$7.96\text{м. } u_2(t) = 2\cos(0,5 \cdot 10^4 t - 2,1) + 0,043\cos(1,5 \cdot 10^4 t - 2\pi) \text{ В}.$$

$$7.102. K_{21}(p) = H\omega_0^2 / (p^2 + \omega_0 p / Q + \omega_0^2); H = 1; \omega_0 = (R_1^2 C_1 C_2)^{-1/2}; Q = \sqrt{C_1 / C_2}; C_1 = Q / \omega_0 R_1; C_2 = 1 / (\omega_0 R_1 Q).$$

$$7.103. K_{21}(p) = H p^2 / (p^2 + \omega_0 p / Q + \omega_0^2); H = K; \omega_0 = (R_1 C_1 R_2 C_2)^{-1/2}; Q = \sqrt{(R_2 C_2) / (R_1 C_1)} + \sqrt{(R_2 C_1) / (R_1 C_2)} + (1 - K) \sqrt{(R_1 C_2) / (R_2 C_1)}; C = 1 / (\omega_0 R); K = 3 - 1 / Q.$$

$$7.104. K_{21}(p) = H p^2 / (p^2 + \omega_0 p / Q + \omega_0^2); H = 1; \omega_0 = (R_1 C_1 R_2 C_2)^{-1/2}; Q = \sqrt{(R_2 C_2) / (R_1 C_1)}; C_1 = 1 / (\omega_0 R Q); C_2 = Q / (\omega_0 R).$$

$$7.105. K_{21}(p) = H(\omega_0 / Q) p / (p^2 + \omega_0 p / Q + \omega_0^2); H = K / (3 - 2K); \omega_0 = 1 / (RC); Q = (1 - K) / (3 - 2K).$$

$$7.106. K_{21}(p) = H(\omega_0 / Q) p / (p^2 + \omega_0 p / Q + \omega_0^2);$$

$$H = K/(2 - K + 2R_1/R_2); \omega_0 = [2/(R_1R_2C_1^2)]^{1/2};$$

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{\left[ 2\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} + (2 - K)\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \right]}.$$

**7.107.**  $K_{21}(p) = H(\omega_0/Q)p/(p^2 + \omega_0p/Q + \omega_0^2);$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{R_1C_1R_2C_2(K + 1)};$$

$$Q = \sqrt{K + 1} [\sqrt{(R_2C_2)/(R_1C_1)} + \sqrt{(R_1C_1)/(R_2C_2)} + \sqrt{(R_1C_2)/(R_2C_1)}];$$

$$H = -K/(1 + R_1C_1/(R_2C_2) + R_1/R_2); C = 1/(3\omega_0RQ); K = 9Q^2 - 1.$$

**7.109м.**  $K_{21}(p) = H\omega_0^2/(p^2 + \omega_0p/Q + \omega_0^2); H = -R_3/R_1;$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{R_2C_1R_3C_2}; Q = \left[ \sqrt{\frac{C_2R_2R_3}{C_1R_1^2}} + \sqrt{\frac{C_2R_3}{C_1R_2}} + \sqrt{\frac{C_2R_2}{C_1R_3}} \right]^{-1}.$$

**7.110м.**  $K_{21}(p) = H(\omega_0/Q)p/(p^2 + \omega_0p/Q + \omega_0^2);$

$$H = -R_1C_1/[(R_1 + R_2)C_3]; \omega_0 = 1/\sqrt{R_1R_2C_3C_{12}}; C_{12} = C_1 + C_2;$$

$$Q = \sqrt{R_2C_{12}/(R_1C_3)}/(1 + R_2/R_1).$$

**7.111м.**  $K_{21}(p) = H(\omega_0/Q)p/(p^2 + \omega_0p/Q + \omega_0^2);$

$$H = -\frac{R_3/R_1}{1 + C_1/C_2}; \omega_0 = 1/\sqrt{R_{12}R_3C_1C_2}; R_{12} = R_1R_2(R_1 + R_2);$$

$$Q = \sqrt{R_3C_1/(R_{12}C_2)}/(1 + C_1/C_2).$$

**7.112.**  $K_{21}(p) = Hp^2/(p^2 + \omega_0p/Q + \omega_0^2); H = C_1(1 + R_4/R_3)/C_{12};$

$$C_{12} = C_1 + C_2; \omega_0 = 1/\sqrt{R_1R_2C_{12}C_3};$$

$$Q = \sqrt{R_1C_{12}/(R_2C_3)}/[1 + C_{12}/C_3 - R_1R_4/(9R_2R_3)]^{-1}.$$

**7.113.**  $K_{21}(p) = H(\omega_0/Q)p/(p^2 + \omega_0p/Q + \omega_0^2); H = -Y_{21}/Y_{22};$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{C_1C_2K_{инв}}; Q = \sqrt{C_1/(C_2K_{инв})}/Y_{22}.$$

### Глава 8

**8.1.**  $Z_B = 249e^{-j37,6^\circ}$  Ом;  $\gamma = 47,5 \cdot 10^{-3}e^{j52,4^\circ} = (29 + j37,6) \cdot 10^{-3}$  км<sup>-1</sup>;  
 $\alpha = 29 \cdot 10^{-3}$  Нп/км;  $\beta = 37,6 \cdot 10^{-3}$  рад/км;  $v_{ф} = 134 \cdot 10^{-3}$  км/с;  $\lambda = 167$  км.

**8.2м.**  $\alpha = [0,5(z_1y_1 + R_1G_1 - \omega^2L_1C_1)]^{1/2}; \beta = [0,5(z_1y_1 - R_1G_1 + \omega^2L_1C_1)]^{1/2},$  где  $z_1 = \sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}; y_1 = \sqrt{G_1^2 + (\omega C_1)^2}.$  При

$$\omega L_1 \gg R_1 \text{ и } \omega C_1 \gg G_1 \alpha \approx 0,5R_1\sqrt{C_1/L_1} + 0,5G_1\sqrt{L_1/C_1}, \beta \approx \omega\sqrt{L_1C_1}.$$

**8.4.**  $\rho_2 = -0,117; K_6 = 0,79.$

**8.5.**  $\rho_2 = 0,147e^{j199^\circ}; K_6 = 0,744.$

**8.7.**  $\dot{U}(x) = [\dot{U}(0)\text{sh } \gamma(l - x) + \dot{U}(l)\text{sh } \gamma x](\text{sh } \gamma l)^{-1};$

$$\dot{I}(x) = [\dot{U}(0)\text{ch } \gamma(l - x) + \dot{U}(l)\text{ch } \gamma x](Z_B\text{sh } \gamma l)^{-1}.$$

- 8.8.**  $U(x') = 1,005(\cos^2 A + 0,56\sin^2 A)^{1/2}$  В;  
 $I(x') = 14(0,56\cos^2 A + \sin^2 A)^{1/2}$  мА, где  $A = 3,53x'$ ;  $x' = l - x$ .
- 8.10м.**  $R_B = 74,5$  Ом.
- 8.12.**  $a = 0,9$  м.
- 8.13.**  $x_H = -308$  Ом. Линия нагружена на  $C_H = 5,2$  пФ.
- 8.14м.**  $Z_{11} = Z_{22} = Z_B \operatorname{ch} \gamma l$ ;  $Z_{12} = Z_{21} = Z_B \operatorname{ch} \gamma l$ .
- 8.15м.**  $K_p(j\omega) = 2Z_{H2}Z_B e^{-\gamma l} [(Z_{H1} + Z_B)(Z_{H2} + Z_B)(1 - \rho_1 \rho_2 e^{-2\gamma l})]^{-1}$ , где  
 $\rho_1 = (Z_{H1} - Z_B)/(Z_{H1} + Z_B)$ ;  $\rho_2 = (Z_{H2} - Z_B)/(Z_{H2} + Z_B)$ .
- 8.19.**  $l_{\min} = 0,625$  м.
- 8.20.**  $l_{\min} = 1,34$  м.
- 8.21.**  $Z_H = -j90,8$  Ом;  $C_H = 17,5$  пФ.
- 8.22.**  $Z_H = j62,3$  Ом;  $L_H = 99,2$  нГн.
- 8.23.**  $l_{\min} = \lambda/2$ .
- 8.24.**  $l_{\min} = \lambda/4$ .
- 8.25.** а) Подключить короткозамкнутый отрезок линии длиной  $l = \pi v_{\Phi}/(2\omega_1)$ ; б) подключить разомкнутый отрезок линии такой же длины.
- 8.27.**  $Z_{Bx} = (65,5 + j17,7)$  Ом.
- 8.28м.** а)  $R_2 = 80$  Ом;  $R_3 = 42,2$  Ом;  $K_{63} = 0,563$ ; б)  $R_2 = 125$  Ом;  $R_3 = 67,5$  Ом;  $K_{63} = 0,9$ .
- 8.29м.**  $Z_1 = Z_{11} - Z_{12}$ ;  $Z_3 = Z_{22} - Z_{12} = j1102$  Ом;  $Z_2 = Z_{12} = -j702$  Ом, комплексные сопротивления  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$  соединены согласно рис. Т7.17, б —  $Z_1 = Z_3 = j\omega L$ ,  $L = 175$  мГн;  $Z_2 = 1/(j\omega C)$ ,  $C = 0,227$  мкФ.
- 8.30м.** Схема замещения линии приведена на рис. Т7.17, в —  $Z_1 = Z_3 = R_1 = 1/(Y_{11} + Y_{12}) = 25,2$  кОм;  $Z_2 = -1/Y_{12} = 1,16$  кОм.
- 8.32.**  $f_0 = 223$  МГц;  $R_0 = 32,9$  кОм;  $Q = 346$ .
- 8.33м.**  $\omega_0 = \pi/(2l\sqrt{L_1 C_1})$ ;  $R_0 = R_1 l/2$ ;  $Q = \pi\sqrt{L_1/C_1}/(2R_1 l)$ .
- 8.34.**  $f_0 = 223$  МГц;  $R_0 = 0,17$  кОм;  $Q = 346$ .
- 8.35.**  $R_{BT} = \sqrt{R_B R_H} = 70,7$  Ом.
- 8.37.**  $L_{\text{доп}} = 541$  мГн. Для линии без  $L_{\text{доп}}$   $Z_B = 249e^{-j37,6^\circ}$  Ом;  $\gamma = \alpha + j\beta = (29 + j37,6)10^{-3}$  км $^{-1}$ ;  $v_{\Phi} = 134 \cdot 10^3$  км/с;  $\lambda = 167$  км (см. ответ к задаче 8.1). Для линии с  $L_{\text{доп}}$   $Z_B = R_B = 3775$  Ом;  $\gamma = (3 + j721)10^{-3}$  км $^{-1}$ ;  $v_{\Phi} = 6971$  км/с;  $\lambda = 8,71$  км. Включение элемента  $L_{\text{доп}}$  привело к существенным изменениям: волновое сопротивление  $Z_B$  стало вещественным, резко уменьшились  $\alpha$  и  $v_{\Phi}$ , а главное — линия стала неискажающей.
- 8.38м.**  $\alpha_{\min} = \sqrt{R_1 G_1}$ .
- 8.39.**  $t_0 = 0,56$  мкс.
- 8.40м.**  $U(p, x) = \frac{Z_B(p)E(p)}{Z_{H1}(p) + Z_B(p)} [e^{-px/v_{\Phi}} + \rho_2 e^{-p(2l-x)/v_{\Phi}} + S_1 + S_2]$ ;  
 $I(p, x) = \frac{E(p)}{Z_{H1}(p) + Z_B(p)} [e^{-px/v_{\Phi}} + \rho_2 e^{-p(2l-x)/v_{\Phi}} + S_1 - S_2]$ ,

где  $S_1 = \sum_{m=1}^{\infty} (\rho_1 \rho_2)^m \exp[-p(2ml + x)/v_{\phi}]$ ;

$S_2 = \sum_{m=1}^{\infty} (\rho_1^m \rho_2^{m+1} \exp\{-p[2lx(m+1) - x]\}/v_{\phi}$ ;

$\rho_1 = [Z_{н1}(p) - Z_B(p)]/[Z_{н1}(p) + Z_B(p)]$ ;

$\rho_2 = [Z_{н2}(p) - Z_B(p)]/[Z_{н2}(p) + Z_B(p)]$  — коэффициенты отражения в начале и в конце линии;  $v_{\phi}$  — фазовая скорость в линии.

**8.41.** Напряжение  $u_2(t)$  — периодическая последовательность прямоугольных импульсов, начинающихся в момент времени  $t_0 = 0,56$  мкс. Длительность импульса  $t_{н} = 2t_0 = 1,12$  мкс, высота импульса  $E_{н} = 2E = 200$  В, период повторения  $T = 4t_0 = 2,25$  мкс.

**8.42м.**  $u(x) = 0$  при  $0 \leq x \leq 45$  км;  $u(x) = 1$  кВ при  $45$  км  $< x \leq 75$  км;  $u(x) = 2$  кВ при  $75$  км  $\leq x \leq 150$  км.

**8.44.**  $u_2(t_1) = 9,56$  В.

**8.46.** К моменту времени  $t_1 = 0,8$  мс волны в линиях  $L_2$  и  $L_3$  не достигают их концов, поэтому при любых сопротивлениях нагрузки  $R_2$  и  $R_3$  распределение напряжений вдоль  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  будет таким же, как указано в задаче 8.45р.

**8.47.**  $R_1 = 150$  Ом;  $R_2 = 75$  Ом.

**8.48м.**  $U_2/U_1 = 1$ , если: 1)  $a = L_1 l/L = 0$ , т.е.  $L = \infty$ ; 2)  $\omega = \infty$ ; 3) частота колебания удовлетворяет условию  $2\psi/a = -\text{tg} \psi$ , где  $\psi = \omega l_2 \sqrt{L_1 C_1}$  — нормированная частота.

**8.49.**  $U_2/U_1 = 1$ , если: 1)  $q = C/(C_1 l) = 0$ , т.е.  $C = 0$ ; 2)  $\omega = 0$ ; 3) частота колебания удовлетворяет условию  $q\psi/2 = \text{ctg} \psi$ ,  $\psi = \omega l_2 \sqrt{L_1 C_1}$  — нормированная частота.

**8.50м.**  $g_1 > 1,39\sqrt{C_1/L_1}/l$ .

**8.51м.**  $A_{11} = A_{22} = \text{ch} \theta$ ;  $A_{12} = R_1 l \theta^{-1} \text{sh} \theta$ ;  $A_{21} = \theta(R_1 l)^{-1} \text{sh} \theta$ ;  $\theta = l\sqrt{j\omega R_1 C_1}$ ;  $Z_{11} = Z_{22} = R_1 l \theta^{-1} \text{ch} \theta$ ;  $Z_{12} = Z_{21} = R_1 l \theta^{-1} \text{ch} \theta$ ;  $Y_{11} = Y_{22} = \theta(R_1 l)^{-1} \text{ch} \theta$ ;  $Y_{12} = Y_{21} = -\theta(R_1 l)^{-1} \text{ch} \theta$ .

**8.52м.** При  $f = 1$  МГц  $\alpha = 396$  Нп/м;  $\beta = 396$  рад/м;  $l/\lambda = 0,631$ ; при  $f = 10$  МГц  $\alpha = 1253$  Нп/м;  $\beta = 1253$  рад/м;  $l/\lambda = 1,99$ .

**8.53м.**  $R_{\kappa} = \sqrt{R_1/G_1} \text{ch}(l_{\kappa} \sqrt{R_1 G_1})$ .

**8.55м.**  $K_{21x}(j\omega) = 1 - \text{sh}(l\sqrt{j\omega R_1 C_1})$ .

**8.56.**  $K_{21x}(j\omega) = 0,5$ .

**8.57м.** Для рис. Т8.10,  $a - Z_{\text{эк}} = 2R_1 l \theta^{-1} \text{th}(\theta/2)$ ;  $\theta = l\sqrt{j\omega R_1 C_1}$ ; для рис. Т.8.10,  $б - Z_{\text{эк}} = 2R_1 l \theta^{-1} \text{ch} \theta$ ; для рис. Т8.10,  $в - Z_{\text{эк}} = R_1 l \theta^{-1} \text{th} \theta$ ; для рис. Т8.10,  $з - Z_{\text{эк}} = R_1 l (2\theta)^{-1} \text{ch}(\theta/2)$ .

**8.60.**  $g(t) = 1 - g_1(t)$ , где  $g_1(t)$  — переходная характеристика цепи, рассмотренной в задаче 8.59р.

**8.61.**  $g(t) = 0,5 \cdot 1(t)$ .

**8.62м.** Используя метод наименьших квадратов, находим  $k = 1,85$ ;  $R_{\text{эк}} C_{\text{эк}} = 0,541 R_1 l C_1 l$ .

- 8.63.**  $u(l, t) = 5,22\cos(2\pi \cdot 10^6 t - 0,596)$  В;  
 $i(l, t) = 35,5\cos(2\pi \cdot 10^6 t - 0,596)$  мА;  $R_H = 147$  Ом.
- 8.64м.**  $u(l, t) = 19,2\cos(2\pi \cdot 10^6 t - 0,596)$  В;  
 $i(l, t) = 35,5\cos(2\pi \cdot 10^6 t - 0,596)$  мА;  $R_H = 540$  Ом.
- 8.65м.**  $l = 2,31$  м;  $q < 0$ . Согласование основной линии с нагрузкой сохраняется на любой частоте.
- 8.66.**  $l = 2,31$  м;  $q > 0$ .

## Глава 9

- 9.1.** Для рис. Т9.1,  $a - Z_{\text{вх}}(p) = [p^2 R_1 C_1 R_2 C_2 + p(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) + 1][p^2 R_2 C_1 C_2 + p C_1]^{-1}$ ; для рис. Т9.1,  $b - Z_{\text{вх}}(p) = [p^2 R_1 C_1 R_2 C_2 + p(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) + 1][p^2 R_2 C_1 C_2 + p(C_1 + C_2)]^{-1}$ .
- 9.2.** Для рис. Т.9.1,  $\theta - Y_{\text{вх}}(p) = (p^3 L_2 C_1 C_2 + p C_1)[p^4 L_1 C_1 L_2 C_2 + p^2(L_1 C_1) + L_2 C_2 + L_2 C_1] + 1]^{-1}$ ; для рис. Т9.1,  $z - Y_{\text{вх}}(p) = (p^2 LC + 2pRC + 1)(p^2 LCR + 2pL + R)^{-1}$ .
- 9.3.** а) Да; б) нет, так как степень числителя меньше степени знаменателя на 2; в) да; г) нет, так как  $\text{Re}[F_4(j\omega)] < 0$  при  $\omega > 1/\sqrt{2}$ .
- 9.7.** Физически реализуема только диаграмма рис. Т9.4, д.
- 9.8.** а) и б)  $R$ -цепь; в) и г)  $RC$ -цепь.
- 9.10.** 1) Нет; 2) нет; 3) да; 4) нет.
- 9.11.** 1) Нет; 2) да; 3) нет.
- 9.12м.** а) Нет; б) нет; в)  $RLC$ -цепь; г)  $RC$ -цепь (для  $Z_{\text{вх}}$ );  $RL$ -цепь (для  $Y_{\text{вх}}$ ); д)  $RL$ -цепь (для  $Z_{\text{вх}}$ );  $RC$ -цепь (для  $Y_{\text{вх}}$ ).
- 9.14м.**  $0 \leq a \leq 59,7$ .
- 9.16.**  $Z(p) = (16p^4 + 12p^2 + 1)(8p^3 + p)^{-1}$  Ом.
- 9.17.**  $Y(p) = (16p^4 + 12p^2 + 1)(8p^3 + p)^{-1}$  См; цепи на рис. Т9.8 и Т9.9 дуальны.
- 9.19м.** Для рис. Т9.17 —  $C_\infty = 3$  Ф;  $L_0 = 1/5$  Гн;  $L_1 = 1/4$  Гн;  $C_1 = 1$  Ф;  $L_2 = 1/6$  Гн;  $C_2 = 2/3$  Ф.
- 9.20.** Тип  $(x-x)$  для  $x(\omega)$  и тип  $(0-0)$  для  $b(\omega)$ . Для рис. Т9.16 —  $L_2 = 0$ ;  $C_2 = \infty$ . Для рис. Т9.17 —  $C_\infty = 0$ ;  $L_0 = \infty$ .
- 9.22.** Для рис. Т9.17 —  $L_0 = \infty$ ;  $L_2 = \infty$ ;  $C_2 = 0$ ;  $C_\infty = 20$  мФ;  $L_1 = 0,5$  нГн;  $C_1 = 50$  мФ. Для рис. Т9.16 —  $L_\infty = 0$ ;  $L_2 = 0$ ;  $C_2 = \infty$ ;  $C_0 = 70$  мФ;  $C_1 = 28$  мФ;  $L_1 = 12,5/49$  нГн.
- 9.23.** Для рис. Т9.16 —  $L_\infty = 1$  Гн;  $C_0 = 2$  Ф;  $L_1 = 3$  Гн;  $C_1 = 3$  Ф;  $L_2 = 0$ ;  $C_2 = \infty$ .
- 9.24.** Для рис. Т9.16 —  $L_\infty = 3/4$  Гн;  $C_0 = 7$  Ф;  $L_1 = 25/196$  Гн;  $C_1 = 1344/25$  Ф;  $L_2 = 0$ ;  $C_2 = \infty$ . Для рис. Т9.17 —  $L_0 = \infty$ ;  $C_\infty = 0$ ;  $L_1 = 1$  Гн;  $C_1 = 4$  Ф;  $L_2 = 3$  Гн;  $C_2 = 3$  Ф.
- 9.25.** Все индуктивности следует увеличить в 10 раз, а емкости — уменьшить в 10 раз.
- 9.26м.** Для рис. Т9.16 —  $L_\infty = 0$ ;  $C_0 = \infty$ ;  $L_1 = 1/6$  Гн;  $C_1 = 2$  Ф;  $L_2 = 1/2$  Гн;  $C_2 = 2$  Ф. Для рис. Т.9.17 —  $L_0 = 2/3$  Гн;  $C_\infty = 1$  Ф;  $L_1 = 2$  Гн;  $C_1 = 1/4$  Ф;  $L_2 = \infty$ ;  $C_2 = 0$ .

- 9.27.  $Z(p) = [1; 3p; 2p; 5p; 4]$  Ом.  
 9.28.  $Y(p) = [2p; 2; 3p; 5p; 4p; 10]$  См.  
 9.30. Для рис. Т9.18 —  $Y_1 = 0; R_2 = 2$  Ом;  $C_3 = 2$  Ф;  $C_4 = 3$  Ф;  $C_5 = 4$  Ф.  
 9.31. Для рис. Т9.18 —  $C_1 = 2$  Ф;  $C_2 = 1/3$  Ф;  $L_3 = 1$  Гн;  $L_4 = 4$  Гн;  $Y_5 = \infty$ .  
 9.32. Для рис. Т9.18 —  $C_1 = 1$  Ф;  $R_2 = 2$  Ом;  $C_3 = 3$  Ф;  $C_4 = 4$  Ф;  $Y_5 = \infty$ .  
 9.34. Для рис. Т9.18 — а)  $Y_1 = 0; L_2 = 6/5$  Гн;  $C_3 = 25/9$  Ф;  $L_4 = 9/5$  Гн;  $Y_5 = \infty$ ; б)  $L_1 = 3$  Гн;  $C_2 = 1$  Ф;  $L_3 = 2$  Гн;  $Z_4 = \infty$ ;  $Y_5 = 0$ .  
 9.35. Для рис. Т9.18 — а)  $C_1 = 2$  Ф;  $L_2 = 3$  Гн;  $C_3 = 1$  Ф;  $Z_4 = \infty$ ;  $Y_5 = 0$ ; б)  $Y_1 = 0; C_2 = 3$  Ф;  $L_3 = 1/3$  Гн;  $C_4 = 6$  Ф;  $Y_5 = \infty$ .  
 9.36. Для рис. Т9.18 — а)  $Y_1 = 0; L_2 = 1$  Гн;  $C_3 = 2$  Ф;  $L_4 = 3$  Гн;  $C_5 = 4$  Ф; б)  $Y_1 = 0; C_2 = 6$  Ф;  $L_3 = 7/3$  Гн;  $C_4 = 48/49$  Ф;  $L_5 = 7/4$  Гн.  
 9.37. Для рис. Т9.18 — а)  $Y_1 = 0; L_2 = 2/3$  Гн;  $C_3 = 54/29$  Ф;  $L_4 = 841/12$  Гн;  $C_5 = 4/29$  См; б)  $Y_1 = 0; C_2 = 2$  Ф;  $L_3 = 1$  Гн;  $C_4 = 3$  Ф;  $L_5 = 2$  Гн.  
 9.38. Для рис. Т9.18 —  $C_1 = 1$  Ф;  $L_2 = 2$  Гн;  $C_3 = 1$  Ф;  $L_4 = 4$  Гн;  $C_5 = 3$  Ф.  
 9.39. Все сопротивления продольных ветвей следует увеличить, а проводимости поперечных ветвей уменьшить в  $Q$  раз.  
 9.40м. Для рис. Т9.18 — а)  $Y_1 = 0; L_2 = 6/5$  Гн;  $C_3 = 25/9$  Ф;  $L_4 = 9/5$  Гн;  $Y_5 = \infty$ ; б)  $L_1 = 3$  Гн;  $C_2 = 1$  Ф;  $L_3 = 2$  Гн;  $Z_4 = \infty$ ;  $Y_5 = 0$ .  
 9.41. Для рис. Т9.18 — а)  $C_1 = 2$  Ф;  $L_2 = 3$  Гн;  $C_3 = 1$  Ф;  $Z_4 = \infty$ ;  $Y_5 = 0$ ; б)  $Y_1 = 0; C_2 = 3$  Ф;  $L_3 = 1/3$  Гн;  $C_4 = 6$  Ф;  $Y_5 = \infty$ .  
 9.42. Для рис. Т9.18 — а)  $C_1 = 1$  Ф;  $L_2 = 1/2$  Гн;  $C_3 = 4$  Ф;  $L_4 = 1/6$  Гн;  $Y_5 = \infty$ ; б)  $L_1 = 2/3$  Гн;  $C_2 = 5/4$  Ф;  $L_3 = 2/25$  Гн;  $C_4 = 5$  Ф;  $Y_5 = \infty$ .  
 9.44м. Для рис. Т9.19 —  $L_1 = 1/11$  Гн;  $R_1 = 100$  Ом;  $C = 100$  мкФ;  $R_2 = 100/11$  Ом.  
 9.45. АЧХ и ФЧХ комплексного коэффициента передачи цепи по напряжению  $K_{21}(j\omega)$  приведены: для рис. Т9.20, а — на рис. О.9, а, б; для рис. Т9.20, б — на рис. О.9, в, б; для рис. Т9.20, в — на рис. О.9, з, д; для рис. 9.20, з — на рис. О.9, е, д.

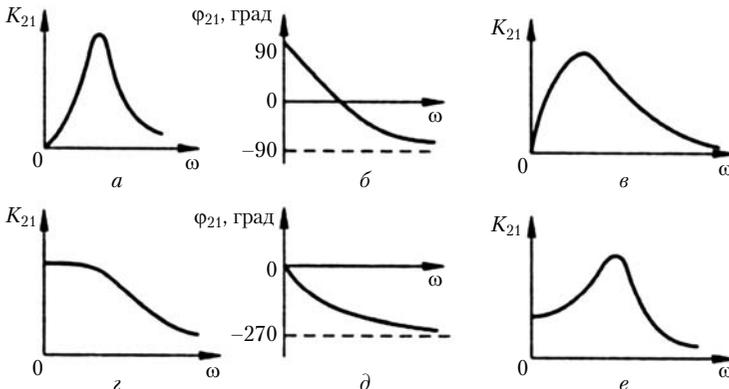


Рис. О.9

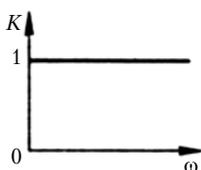


Рис. О.10

**9.47.** Нет. АЧХ  $K(j\omega)$  равномерна (рис. О.10).

**9.48.** Неминимально-фазовым является второй четырехполюсник.

**9.52.** Для рис. Т9.23,  $a - Z_{1\Pi} = 2 + 1/(3p)$ ;  $Z_{2\Pi} = (4p + 1)^{-1}$ ;  $Z_{3\Pi} = (2p + 1/3)^{-1}$ . Комплексное сопротивление  $Z_{1\Pi}$  может быть реализовано в виде последовательного соединения резистивного элемента  $R_1 = 2$  Ом и емкостного элемента  $C_1 = 3$  Ф; комплексное сопротивление  $Z_{2\Pi}$  — в виде параллельного соединения резистивного элемента  $R_2 = 1$  Ом и емкостного элемента  $C_2 = 4$  Ф; комплексное сопротивление  $Z_{3\Pi}$  — в виде параллельного соединения элементов  $R_3 = 3$  Ом и  $C_3 = 2$  Ф.

**9.55.** Нельзя, так как наличие нулей функции  $K(p)$  в правой полуплоскости указывает на неминимально-фазовый характер цепи.

**9.56.** Для рис. Т9.25 —  $Z_1 = pL_1$ ;  $Z_2 = pL_2 + \frac{1}{pC_2}$ , где  $L_1 = 4/a$  Гн;  $L_2 = 16/a$  Гн;  $C_2 = a/2$  Ф;  $a > 0$ .

**9.59м.** Для рис. Т9.22 —  $Z(p) = pL + R$ , где  $L = 20$  Гн;  $R_1 = 1$  кОм.

**9.60.** Для рис. Т9.22 —  $Z(p) = 4 \cdot 10^3(0,05p + 1)$  Ом, что соответствует параллельному соединению элементов  $C = 12,5$  мкФ и  $R = 4$  кОм.

### Глава 10

$$10.2. \text{ а) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{ б) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \text{ в) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\text{ г) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \text{ д) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{ е) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

**10.3м.** См. рис. Т1.18, б.

$$10.4. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

10.5.  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

10.6м. Для рис. Т10.1,  $e - B_1^0$ , для рис. Т10.3 —  $B_2^0$ ;

$$B_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; B_2^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

10.9. Для рис. 10.2,  $a - \mathbf{i}_g = [0; i_2(0); 0; i_4(0); 0; 0; i_7(0); 0]^t$ ;

$$\mathbf{u}_g = [-e; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]^t;$$

$$\text{diag } \mathbf{Y} = [R_1^{-1}; (sL_1)^{-1}; sC_1; (sL_2)^{-1}; sC_2; sC_3; (sL_3)^{-1}; R_2^{-1}];$$

$$\mathbf{u}_v = [-e; 0; u_3(0); 0; u_5(0); u_6(0); 0; 0]^t; \mathbf{i}_v = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]^t;$$

$$\text{diag } \mathbf{Z} = [R_1; sL_1; (sC_1)^{-1}; sL_2; (sC_2)^{-1}; (sC_3)^{-1}; sL_3; R_2];$$

для рис. Т10.2,  $\theta - \mathbf{i}_g = [0; i_2(0); i_3(0); 0; j; 0]^t$ ;  $\mathbf{u}_g = [-e; 0; 0; 0; 0; 0]^t$ ;

$$\text{diag } \mathbf{Y} = [R_1^{-1}; (sL_1)^{-1}; (sL_2)^{-1}; sC_1; R_2^{-1}; sC_2];$$

$$\mathbf{u}_v = [-e; 0; 0; u_4(0); 0; u_6(0)]^t; \mathbf{i}_v = [0; 0; 0; 0; j; 0]^t;$$

$$\text{diag } \mathbf{Z} = [R_1; sL_1; sL_2; (sC_1)^{-1}; R_2; (sC_2)^{-1}].$$

10.12.  $\mathbf{Y}_{(ij)}\mathbf{u}_{i0} = \mathbf{j}_{i0}$ ; матрицы  $\mathbf{j}_{i0}$  и  $\mathbf{Y}_{(ij)}$  приведены в решениях задач 10.10р и 10.11р;  $\mathbf{u}_{i0} = [u_{10}; u_{20}; u_{30}]^t$ .

10.13.  $\mathbf{Y}_{(ij)}\mathbf{u}_{i0} = \mathbf{j}_{i0}$ ;  $Y_{(11)} = R_1^{-1} + (sL_1)^{-1} + (sL_2)^{-1} + sC_1$ ;

$$Y_{(22)} = sC_1 + R_1^{-1}; Y_{(33)} = R_2^{-1} + (sL_2)^{-1} + sC_2; Y_{(12)} = Y_{(21)} = -sC_1;$$

$$Y_{(13)} = Y_{(31)} = -(sL_2)^{-1}; Y_{(23)} = Y_{(32)} = -R_2^{-1}; \mathbf{u}_{i0} = [u_{10}; u_{20}; u_{30}]^t;$$

$$\mathbf{j}_{i0} = [eR_1^{-1} - i_2(0) - i_3(0); j; -j + i_3(0)]^t.$$

10.14.  $\mathbf{Y}_{(ij)}(p)\mathbf{U}_{i0}(p) = \mathbf{J}_{i0}(p)$ , матрица  $\mathbf{Y}_{(ij)}(p)$  получается из матрицы  $\mathbf{Y}_{(ij)}$ , приведенной в ответе к задаче 10.13 заменой  $s$  на  $p$ ;

$$\mathbf{U}_{i0}(p) = [U_{10}; U_{20}; U_{30}]^t; \mathbf{J}_{i0}(p) = [E(p)R_1^{-1} - i_2(0)/p - i_3(0)/p - C_1u_4(0); J(p) + C_1u_4(0); -J(p) + i_3(0)/p - C_2u_6(0)]^t.$$

10.15.  $\mathbf{Y}_{(ij)}\dot{\mathbf{U}}_{i0} = \dot{\mathbf{J}}_{i0}$ ; матрица  $\mathbf{Y}_{(ij)}$  получается из матрицы  $\mathbf{Y}_{(ij)}$ , приведенной в ответе к задаче 10.13, заменой  $s$  на  $j\omega$ ;

$$\dot{\mathbf{U}}_{i0} = [\dot{U}_{10}; \dot{U}_{20}; \dot{U}_{30}]^t; \dot{\mathbf{J}}_{i0} = [\dot{E}R_1^{-1}; \dot{j}; -\dot{j}]^t.$$

10.18.  $\mathbf{Z}_{(ij)}\mathbf{i}_{ii} = \mathbf{e}_{ii}$ ; матрицы  $\mathbf{Z}_{(ij)}$  и  $\mathbf{e}_{ii}$  приведены в решениях задач 10.16р и 10.17р;  $\mathbf{i}_{ii} = [i_{11}; i_{22}; i_{33}]^t$ , где  $i_{11} = i_1; i_{22} = i_2; i_{33} = i_3$ .

$$\mathbf{Z}_{(11)} = R_1 + (sC_1)^{-1}; \mathbf{Z}_{(22)} = (sC_1)^{-1} + sL + R_3; \mathbf{Z}_{(33)} = R_2 + (sC_2)^{-1} + sL; \mathbf{Z}_{(12)} = \mathbf{Z}_{(21)} = -(sC_1)^{-1}; \mathbf{Z}_{(13)} = \mathbf{Z}_{(31)} = 0; \mathbf{Z}_{(23)} = \mathbf{Z}_{(32)} = -sL; \mathbf{i}_{ii} = [i_{11}; i_{22}; i_{33}]^t, \text{ где } i_{11} = i_1; i_{22} = i_2; i_{33} = i_6;$$

$$\mathbf{e}_{ii} = [e_1 - u_4(0); -R_3j + u_4(0); -e_2 - u_6(0)]^t.$$

**10.20.**  $\mathbf{Z}_{(ij)}(p)\mathbf{I}_{ii}(p) = \mathbf{E}_{ii}(p)$ ; матрица  $\mathbf{Z}_{(ij)}(p)$  получается из матрицы  $\mathbf{Z}_{(ij)}$ , приведенной в ответе к задаче 10.19, заменой  $s$  на  $p$ ;

$\mathbf{I}_{ii}(p) = [I_{11}(p); I_{22}(p); I_{33}(p)]^t$ ;  $\mathbf{E}_{ii}(p) = [E_1(p) - u_4(0)/p; -R_3J(p) + u_4(0)/p + Li_5(0); -E_2(p) - u_6(0)/p - Li_5(0)]^t$ .

**10.21.**  $\mathbf{Z}_{(ij)}\dot{\mathbf{I}}_{ii} = \dot{\mathbf{E}}_{ii}$ , матрица  $\mathbf{Z}_{(ij)}$  получается из матрицы  $\mathbf{Z}_{(ij)}$ , приведенной в ответе к задаче 10.19, заменой  $s$  на  $j\omega$ ;  $\dot{\mathbf{I}}_{ii} = [\dot{I}_{11}; \dot{I}_{22}; \dot{I}_{33}]^t$ ;  $\dot{\mathbf{E}}_{ii} = [\dot{E}_1; -R_3j; -\dot{E}_2]^t$ .

**10.22м.**  $\mathbf{Z}_{(ij)}\mathbf{i}_{ii} = \mathbf{e}_{ii}$ ;  $\mathbf{i}_{ii} = [i_{11}; i_{22}]^t$ , где  $i_{11} = i_2$ ;  $i_{22} = i_4$ ;

$\mathbf{e}_{ii} = [R_1j_1 + e; R_3j_2 + e - u_C(0)]^t$ ;

$Z_{(11)} = R_1 + R_2 + sL$ ;  $Z_{(22)} = R_2 + R_3 + (sC)^{-1}$ ;  $Z_{(12)} = Z_{(21)} = R_2$ .

**10.24.** Граф имеет единственное собственное дерево, содержащее ветви с элементами  $e$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ .

$$\mathbf{Q}_x = \begin{matrix} & R_1 & R_2 & L_1 & L_2 & j \\ \begin{matrix} e \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

**10.26.** Нормальное дерево содержит сопротивление  $R$  и одну из индуктивностей  $L_1$  или  $L_2$ .

**10.27м.** Для цепи рис. Т10.6

$$\mathbf{Q}_x = \begin{matrix} & C_2 & R_1 \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ C_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{Q}_x = \begin{matrix} & C_1 & R_1 \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ C_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix};$$

для цепи рис. Т10.7

$$\mathbf{Q}_x = \begin{matrix} & L_2 & j \\ \begin{matrix} R \\ L_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{Q}_x = \begin{matrix} & L_1 & j \\ \begin{matrix} R \\ L_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

**10.29.** Для цепи рис. Т10.5, б

$$\begin{bmatrix} i_B \\ i_{C_1} \\ i_{C_2} \\ i_{C_3} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R_1} \\ i_{R_2} \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ j \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} u_{R_1} \\ u_{R_2} \\ u_{L_1} \\ u_{L_2} \\ -u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e \\ u_{C_1} \\ u_{C_2} \\ u_{C_3} \end{bmatrix};$$

для цепи рис. Т10.6

$$\begin{bmatrix} i_{B_1} \\ i_{B_2} \\ i_{C_1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{C_1} \\ i_{R_1} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} u_{C_1} \\ u_{R_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e_1 \\ -e_2 \\ u_{C_1} \end{bmatrix};$$

для цепи рис. Т10.7

$$\begin{bmatrix} i_R \\ i_{L_1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L_2} \\ j \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} u_{L_2} \\ -u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_R \\ u_{L_1} \end{bmatrix}.$$

**10.31.** Для цепи рис. Т10.5, а

$$\begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ u_{C_1} \\ u_{C_2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} R_1 & -1 & -1 \\ 1 & \frac{R_3 + R_4}{A} & \frac{R_3}{A} \\ 1 & \frac{R_3}{A} & \frac{R_2 + R_3}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ u_{C_1} \\ u_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{R_3}{A} \\ 1 & \frac{R_2 + R_3}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j \\ e \end{bmatrix},$$

где  $A = R_2R_3 + R_3R_4 + R_2R_4$ .

Для цепи рис. Т10.5, б

$$\begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ i_{C_1} \\ i_{C_2} \\ i_{C_3} \end{bmatrix} =$$

$$= - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ 1 & 0 & \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} \\ -1 & 1 & \frac{-1}{R_1} & \frac{-1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ i_{C_1} \\ i_{C_2} \\ i_{C_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_1} \\ 0 & \frac{1}{R_1} \\ 1 & \frac{-1}{R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j \\ e \end{bmatrix}.$$

**10.32м.** Для цепи рис. Т10.6

$$(C_1 + C_2) \frac{du_{C_1}}{dt} = -\frac{1}{R_1} u_{C_1} + \frac{e_1}{R_1} + C_2 \frac{de_2}{dt}; \quad u_{C_2} - u_{C_1} = -e_2;$$

для цепи рис. Т10.7

$$(L_1 + L_2) \frac{di_{L_2}}{dt} = -Ri_{L_2} + L_1 \frac{dj}{dt}; \quad i_{L_1} + i_{L_2} = j.$$

**Покупайте наши книги:**

**В офисе издательства «ЮРАЙТ»:**  
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4,  
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru, www.urait.ru

**В логистическом центре «ЮРАЙТ»:**  
140053, Московская область, г. Котельники, мкр. Ковровый, д. 37,  
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru, www.urait.ru

**В интернет-магазине «ЮРАЙТ»:** www.urait-book.ru,  
e-mail: order@urait-book.ru, тел.: (495) 742-72-12

**Для закупок у Единого поставщика** в соответствии  
с Федеральным законом от 21.07.2005 № 94-ФЗ  
обращайтесь по тел.: (495) 744-00-12,  
e-mail: sales@urait.ru, vuz@urait.ru

*Учебное издание*

**Бирюков Вадим Николаевич,  
Ляшев Владимир Александрович,  
Максимов Михаил Николаевич,  
Мережин Николай Иванович,  
Попов Вадим Петрович,  
Семенцов Владимир Иванович**

## **СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОСНОВАМ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ**

Учебное пособие для бакалавров

Под редакцией *В. П. Попова*

Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>.  
Гарнитура «PetersburgC». Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 14,96. Тираж 1000. Заказ №

**ООО «Издательство Юрайт»**  
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4.  
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru